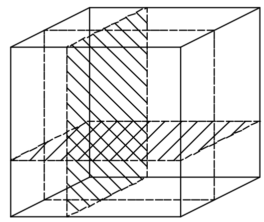
2. Landeswettbewerb Mathematik Bayern
2. Runde 1999/2000

Aufgabe 1

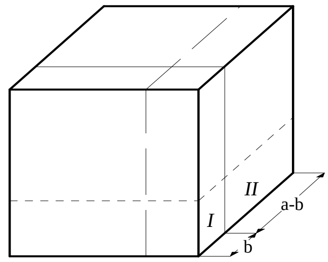
Ein Würfel wird durch je einen Schnitt parallel zur Vorder-, Seiten und Deckfläche in acht Quader zerlegt. (siehe Skizze).



Können sich die Rauminhalte dieser Quader wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 verhalten?

1. Lösung

Vorbemerkung:



Betrachtet man die nebenstehende Skizze, so erkennt man, dass durch den Schnitt parallel zur Vorderfläche 4 Paare von Quadern entstehen, die wie *I* und *II* „hintereinander liegen". Betrachten wir die gemeinsame Fläche von I und II als Grundfläche, so verhalten sich ihre Rauminhalte wie ihre dritten Kanten. Dieses Verhältnis $(a-b):b$ der dritten Kanten ist für jedes der vier Paare gleich.

Behauptung:

Die Rauminhalte der Quader können sich nicht wie $1:2:3:4:5:6:7:8$ verhalten.

Beweis (mit Widerspruch) :

Verhalten sich die Rauminhalte wie $1:2:3:4:5:6:7:8$, so sind sie ganzzahlige Vielfache des Rauminhaltes V_o des kleinsten Quaders. Da nun der Quader mit dem kleinsten Rauminhalt zu einem der obigen vier Paare gehört, kann das Verhältnis der Rauminhalte eines Paares nur von der Form $2:1$ oder $3:1$ oder …8 : 1 sein. Das Verhältnis $(a-b):b$ ist also ganzzahlig.

Der Quader mit dem Rauminhalt $5\cdot V_o$ gehört ebenfalls zu einem Paar. Da 5 eine Primzahl und kein anderes Quadervolumen ein Vielfaches von $5\cdot V_o$ ist, müssen dieser Quader und der Quader mit dem kleinsten Rauminhalt V_o ein Paar bilden und hintereinander liegen. Die Rauminhalte der Quader der anderen drei Paare müssen sich dann ebenfalls wie $5:1$ verhalten.

Auch der Quader mit dem Rauminhalt $2\cdot V_o$ kommt in einem dieser Paare vor. Sein Partner muss dann den Rauminhalt $5\cdot(2\cdot V_o) = 10\cdot V_o$ oder $\frac{1}{5}\cdot(2\cdot V_o)$ haben, wobei die zweite Möglichkeit nicht zutreffen kann, da die Rauminhalte ganzzahlige Vielfache von V_o sind. Einen Teilquader mit dem Rauminhalt $10\cdot V_o$ gibt es aber auch nicht, da der größte Rauminhalt eines Teilquaders $8\cdot V_o$ ist.

2. Lösung

O.B.d.A. kann man von einem Würfel der Kantenlänge 1 ausgehen (zentrische Streckung).

Annahme: Es gibt geeignete Schnitte, so dass sich die Rauminhalte der Teilquader wie $1:2:3:4:5:6:7:8$ verhalten. Wegen $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ besitzen diese Quader die Rauminhalte $\frac{1}{36},\frac{2}{36},\ldots\frac{8}{36}$.

Durch die drei Schnitte werden jeweils vier Kanten in zwei Teilstücke der Längen a und 1 – a bzw. b und 1 – b bzw. c und 1 – c geteilt. Die Benennung der Kanten wird so vorgenommen, dass

$a \le 1-a$, $b \le 1-b$, $c \le 1-c$ und $a \le b \le c$

gilt. Dann gilt auch $a \le b \le c \le 1-c \le 1-b \le 1-a$.

Mit dieser Benennung hat der Quader mit den Kantenlängen a, b und c das kleinste Volumen, der mit den Kantenlängen a, b und 1 – c das zweitkleinste.

Der kleinste Quader Q_1, der zweitkleinste Quader Q_2, ..., der zweitgrößte Quader Q_7 und der größte Quader Q_8 haben dann folgende Kantenlängen bzw. Volumina:

Q_1	a, b, c	$V_1 = a \cdot b \cdot c = \frac{1}{36}$
Q_2	a, b, 1 – c	$V_2 = a \cdot b \cdot (1-c) = \frac{2}{36}$
Q_7	c, 1 – b, 1 – a	$V_7 = c \cdot (1-b) \cdot (1-a) = \frac{7}{36}$
Q_8	1 – c, 1 – b, 1 – a	$V_8 = (1-c) \cdot (1-b) \cdot (1-a) = \frac{8}{36}$

Somit gilt: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{c}{1-c} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{2}{36}} = \frac{1}{2}$ und $\frac{V_7}{V_8} = \frac{c}{1-c} = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{8}{36}} = \frac{7}{8}$, also $\frac{1}{2} = \frac{c}{1-c} = \frac{7}{8}$. Widerspruch!

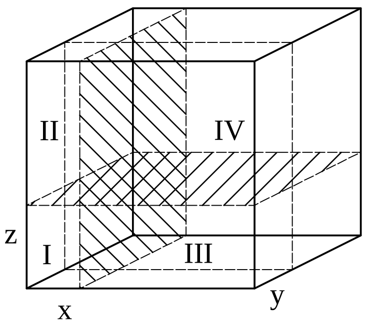
Also ist die Annahme falsch; es gibt also keine Schnitte, so dass sich die Rauminhalte der Teilquader wie $1:2:3:4:5:6:7:8$ verhalten.

3. Lösung:

Vorbemerkungen:

Die Kantenlänge des Würfels wird als Längeneinheit verwendet.

Wenn es eine geeignete Zerlegung des Würfels gibt, so sind alle Volumina der Teilkörper verschieden, denn die acht Rauminhalte soll zueinander im Verhältnis $1:2:3:4:5:6:7:8$ stehen. Die Quader haben die Volumina $\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \ldots, \frac{8}{36}$.



Der Würfel wird nun so gedreht, dass der kleinste Quader links, vorne, unten liegt (siehe Bild).

Die Bezeichnungen für die Teilstrecken werden so gewählt, dass $x \le y \le z \le \frac{1}{2}$ gilt.

Es gilt dann auch $x \le y \le z \le 1-z \le 1-y \le 1-x$.

Für die drei Streckenlängen x, y und z gilt dann sogar, $x < y < z$. Wären nämlich beispielsweise x und y gleich groß, so wären die Volumina von II und III gleich, denn es würde

$$V_{II} = (1-x) \cdot y \cdot z = (1-x) \cdot x \cdot z \quad \text{und} \quad V_{III} = x \cdot (1-y) \cdot z = x \cdot (1-x) \cdot z$$

gelten. Dies steht im Widerspruch dazu, dass die Volumina der acht Teilkörper paarweise verschieden sind. Für die beiden anderen Vergleiche x und z bzw. y und z zeigt man dies entsprechend.

Betrachten wir die sichtbaren Flächen der vier vorn liegenden Quader als Grundflächen, so haben alle vier die gleiche Höhe, nämlich y. Ordnen wir die Rauminhalte der Größe nach, so stimmt die Anordnung mit der der Flächeninhalte der sichtbaren Rechtecke auf der Vorderseite überein.

Quader I	Quader II	Quader III	Quader IV
$A_I = x \cdot z$	$A_{II} = x \cdot (1-z) = x - xz$	$A_{III} = (1-x) \cdot z = z - xz$	$A_{IV} = (1-x) \cdot (1-z)$
$V_I = x \cdot z \cdot y$	$V_{II} = xy - xyz$	$V_{III} = yz - xyz$	$V_{IV} = (1-x) \cdot y \cdot (1-z)$

Die Anordnung $A_I < A_{II} < A_{III} < A_{IV}$ ergibt sich beim ersten und beim dritten Kleiner-Zeichen aus der Produktdarstellung, beim mittleren aus der Summendarstellung der Flächeninhalte. Damit gilt auch $V_I < V_{II} < V_{III} < V_{IV}$. Die entsprechende Anordnung gilt auch für die Volumina der dahinter liegenden Quader, die alle die gemeinsame Höhe $(1-y)$ besitzen.

Es wird nun gezeigt, dass die drei Quader I, II und III in dieser Reihenfolge die kleinsten aller acht Quader sind. Dazu muss noch nachgewiesen werden, dass der Quader III kleiner als der kleinste Quader in der hinteren Schicht ist. Dies ist der Quader, der hinter dem Quader I liegt. Für sein Volumen gilt $V_{I*} = x \cdot (1-y) \cdot z = xz - xyz$. Wegen $x < y$ gilt $xz < yz$ und damit auch $V_{III} < V_{I*}$.

Betrachten wir nun die Rauminhalte der drei Teilkörper I, II und III und bilden paarweise die Quotienten, so folgt:

$$\frac{V_I}{V_{II}} = \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot (1-y) \cdot z} = \frac{y}{1-y} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{2}{36}} = \frac{1}{2}$$, woraus durch Umformen $y = \frac{1}{3}$ folgt.

$$\frac{V_I}{V_{III}} = \frac{x \cdot y \cdot z}{(1-x) \cdot y \cdot z} = \frac{x}{1-x} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}$$,woraus durch Umformen $x = \frac{1}{4}$ folgt.

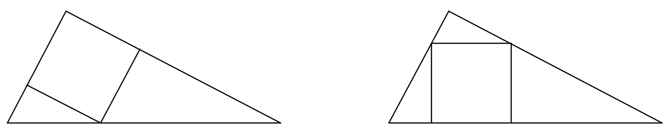
Durch Einsetzen dieser beiden Werte in V_I erhalten wir $z = \frac{1}{3}$.

Danach würden y und z übereinstimmen. Dies steht im Widerspruch dazu; dass die drei Längen x, y und z paarweise verschieden sind.

Aufgabe 2

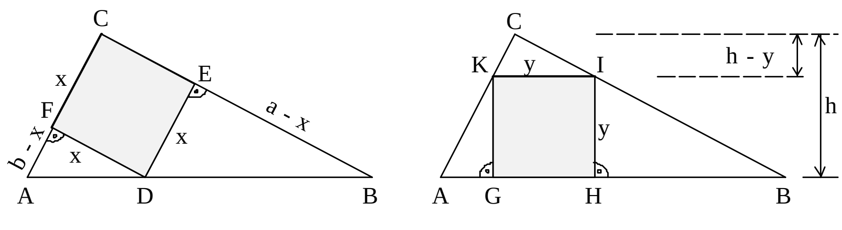
Einem rechtwinkligen Dreieck wird auf zwei Arten ein Quadrat einbeschrieben.

Beweise: Das Quadrat, bei dem zwei Seiten auf den Katheten liegen, hat immer einen größeren Flächeninhalt als das Quadrat, bei dem eine Seite auf der Hypotenuse liegt.



1. Lösung

Zunächst werden die Seitenlängen der Quadrate durch Bestimmungsstücke des rechtwinkligen Dreiecks ABC ausgedrückt.



1. Fall

Mit den Benennungen in der linken Abbildung erhalten wir:

$$A_{ABC} = A_{DECF} + A_{ADF} + A_{DBE}$$

Berücksichtigen wir, dass die Dreiecke ADF und DBE bei F bzw. E einen rechten Winkel haben, so folgt:

$$\frac{1}{2}ab = x^2 + \frac{1}{2}x \cdot (b-x) + \frac{1}{2}x \cdot (a-x)$$

$$ab = 2x^2 + bx - x^2 + ax - x^2$$

$$ab = (a+b) \cdot x$$

$$x = \frac{ab}{a+b} \qquad (1)$$

2. Fall

Mit den Bezeichnungen in der rechten Abbildung erhalten wir:

$$A_{ABC} = A_{GHIK} + A_{KIC} + A_{AGK} + A_{HBI}$$

Die zur Grundseite KI gehörende Höhe im rechtwinkligen Dreieck KIC hat die Länge h – y.

Daher gilt: $A_{KIC} = \frac{1}{2} y \cdot (h - y)$

Außerdem gilt: $A_{AGK} + A_{HBI} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AG} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \overline{HB} \cdot y =$

$$= \frac{1}{2} y \cdot \left(\overline{AG} + \overline{HB}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} y \cdot \left(\overline{AB} - \overline{GH}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} y \cdot (c - y)$$

Folglich ist: $A_{ABC} = y^2 + \frac{1}{2} y \cdot (h - y) + \frac{1}{2} y \cdot (c - y)$

$$\frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} yh + \frac{1}{2} yc$$

$$ab = y \cdot (h + c)$$

$$y = \frac{ab}{h+c} \qquad (2)$$

Ein Vergleich von (1) und (2) zeigt, dass die zu beweisende Behauptung x > y äquivalent zu der Bedingung a + b < h + c ist.

Zwischen den Streckenlängen a, b, c und h besteht die Beziehung $A_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} h \cdot c$, also

$$a \cdot b = h \cdot c$$

Die Gültigkeit der Ungleichung x > y wird nun nachgewiesen:

$x > y$

$\Leftrightarrow \quad a + b < h + c$, da alle vier Variablen positiv sind, gilt auch

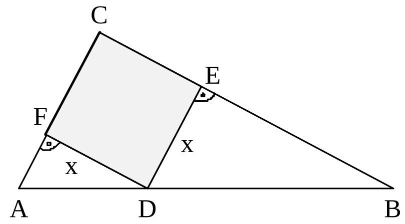
$\Leftrightarrow \quad (a + b)^2 < (h + c)^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2 + 2a \cdot b + b^2 < h^2 + 2h \cdot c + c^2$, wegen $a^2 + b^2 = c^2$ und $a \cdot b = h \cdot c$, folgt

$\Leftrightarrow \quad 0 < h^2$

Diese letzte Ungleichung ist für jedes rechtwinklige Dreieck erfüllt. Da jede Umformung eine Äquivalenzumformung war, ist damit auch die erste Ungleichung für jedes rechtwinklige Dreieck erfüllt.

2. Lösung



Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden, das Dreieck ABC wird jeweils aus den Teildreiecken und dem Quadrat zusammengesetzt.

Im ersten Dreieck gilt:

Da DE parallel zu AC und DF parallel zu BC ist, sind die Dreiecke ABC, ADF und DBE ähnlich.

Für die Verhältnisse der Seitenlängen ergibt sich mit der Benennung in der Zeichnung:

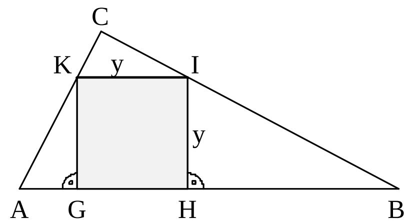
$\overline{DF} : \overline{BC} = x : a$ $\qquad\qquad$ $\overline{DE} : \overline{AC} = x : b$

Die Flächeninhalte der Dreiecke verhalten sich zueinander wie die Quadrate der Seitenlängen.

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

$$\frac{1}{2}a \cdot b = x^2 + \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot b + \frac{x^2}{b^2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot b \qquad (1)$$

Im zweiten Dreieck gilt:



Da die beiden Quadratseiten GK und HI auf der Hypotenuse senkrecht stehen, folgt mit Hilfe des Winkelsummensatzes im Dreieck, dass die vier Dreiecke ABC, KAG, BIH und KIC ähnlich sind.

Die Verhältnisse ihrer Seitenlängen ergeben sich aus der Zeichnung:

$\overline{GK} : \overline{CB} = y : a$ $\qquad\qquad$ $\overline{IH} : \overline{AC} = y : b$ $\qquad\qquad$ $\overline{KI} : \overline{AB} = y : c$.

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC:

$$\frac{1}{2}a \cdot b = y^2 + \frac{y^2}{a^2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot b + \frac{y^2}{b^2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot b + \frac{y^2}{c^2} \cdot \frac{1}{2}a \cdot b \qquad (2)$$

Gleichsetzen der rechten Seiten der beiden Gleichung (1) und (2), sowie anschließendes Vereinfachen ergibt:

$$y^2 + \frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{2}y^2 \frac{a}{b} + \frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{a \cdot b}{c} = x^2 + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{a}{b}$$

bzw.

$$\frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{a \cdot b}{c} = x^2 + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{a}{b} - \left[y^2 + \frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{2}y^2 \frac{a}{b}\right]$$

$$\frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{a \cdot b}{c} = x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b}\right) - \left[y^2\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{2}\frac{a}{b}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{a \cdot b}{c} = \left(x^2 - y^2\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b}\right)$$

Die linke Seite der Gleichung und der zweite Faktor der rechten Seite sind positiv, da alle Variablen Streckenlängen sind. Deshalb ist auch $\left(x^2 - y^2\right)$ positiv.
Da x und y positive Werte sind, folgt daraus x > y.

Aufgabe 3

Beginnend mit einer geraden Zahl a_1 $(a_1 > 2)$ wird durch die Vorschrift $a_{n+1} = a_n^2$ $(n \in \mathfrak{I})$ eine Folge von Zahlen definiert.

Zeige, dass $a_n - 1$ durch mindestens n verschiedene Primzahlen teilbar ist.

Lösung

$a_1 - 1$ ist größer als 1, da $a_1 > 2$ ist. $a_1 - 1$ ist selbst eine Primzahl oder durch mindestens eine Primzahl teilbar. Also ist $a_1 - 1$ durch mindestens eine Primzahl teilbar.

Nun wird gezeigt, dass jede Zahl dieser Folge mindestens einen Primteiler mehr besitzt als die vorhergehende Zahl.

Dazu weisen wir allgemein nach, dass die Zahl $a_{n+1} - 1$ mindestens einen Primteiler mehr hat als $a_n - 1$. Dann besitzt $a_2 - 1$ mindestens einen Primteiler mehr als $a_1 - 1$, also mindestens zwei Primteiler; $a_3 - 1$ hat mindestens einen Primteiler mehr als $a_2 - 1$, also mindestens drei Primteiler, usw.

Es gilt nach dem Bildungsgesetz in der Aufgabenstellung: $a_{n+1} - 1 = a_n^2 - 1 = (a_n - 1) \cdot (a_n + 1)$.

Alle Primteiler von $a_n - 1$ sind auch Primteiler von $a_{n+1} - 1$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $a_n + 1$ mindestens einen Primteiler besitzt, der kein Teiler von $a_n - 1$ ist.

Da $a_n + 1$ größer als $a_n - 1$ ist, ist $a_n + 1$ ein Teiler von $a_{n+1} - 1$, der nicht bereits in $a_n - 1$ enthalten ist. Ist $a_n + 1$ selbst eine Primzahl sind wir fertig, denn dann besitzt $a_{n+1} - 1$ den Primteiler $a_n + 1$ zusätzlich.

Wenn $a_n + 1$ keine Primzahl ist, so gibt es einen Primzahl p als Teiler von $a_n + 1$. Es wird nun gezeigt, dass p kein Teiler von $a_n - 1$ ist.

Dies geschieht durch einen Widerspruchsbeweis.

Es sei p ein gemeinsamer Primteiler von $a_n - 1$ und von $a_n + 1$, dann ist p auch Teiler von $(a_n + 1) - (a_n - 1)$, also von 2. Der gemeinsame Primteiler p muss also 2 sein.

Da aber $a_n + 1$ ungerade ist, kann 2 kein Teiler von $a_n + 1$ sein. Also haben $a_n - 1$ und $a_n + 1$ keinen gemeinsamen Primteiler. Also hat $a_n + 1 > 2$ mindestens einen Primteiler p, der kein Teiler von $a_n - 1$ ist. Die Zahl $a_{n+1} - 1$ hat also mindestens einen Primteiler mehr als $a_n - 1$.

Aufgabe 4

Gegeben sind zwei Primzahlen p und q mit p < q.

Bestimme für x, y ♣$\mathfrak{I}$ und $x \le y$ alle Lösungspaare (x / y) der Gleichung $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p \cdot q}$.

1. Lösung

Die Gleichung der Aufgabenstellung lässt sich äquivalent umformen:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p \cdot q} \quad | \cdot xypq$$

$$pqy + pqx = xy \quad | + p^2q^2 - pqy - pqx$$

$$p^2q^2 = xy - pqy - pqx + p^2q^2 \quad | \text{Faktorisieren}$$

$$p^2q^2 = (x - pq) \cdot (y - pq)$$

$(x - pq)$ ist ein Teiler von p^2q^2 und $(y - pq)$ ist der dazu gehörende Ergänzungsteiler bezüglich p^2q^2.

Da p und q zwei verschiedene Primzahlen sind, hat der Term p^2q^2 die neun Teiler 1, p, q, pq, p^2, q^2, p^2q, pq^2 und p^2q^2.

Unter Berücksichtigung von p < q und x ≤ y gibt es fünf Fälle:

$$x - pq = 1 \quad \wedge \quad y - pq = p^2q^2$$
$$x - pq = p \quad \wedge \quad y - pq = pq^2$$
$$x - pq = q \quad \wedge \quad y - pq = p^2q$$
$$x - pq = p^2 \quad \wedge \quad y - pq = q^2$$
$$x - pq = pq \quad \wedge \quad y - pq = pq$$

Und daraus folgen die fünf Lösungspaare:

(1 + pq / pq(1+pq))
(p(1+q) / pq(1+q))
(q(1+p) / pq(1+p))
(p(p+q) / q(p+q))
(2pq / 2pq)

2. Lösung

Da x und y natürliche Zahlen sind, gilt : $0 < x \le y \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{y} \le \frac{1}{x} < \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{pq} \quad \Rightarrow \quad 0 < pq < x \le y$

Es existieren r, s ∈ N mit $x = pq + r$ und $y = pq + s$ mit $r \le s$.

Damit gilt:
$$\frac{1}{pq + r} + \frac{1}{pq + s} = \frac{1}{pq}$$
$$\frac{pq + s + pq + r}{(pq + r) \cdot (pq + s)} = \frac{1}{pq} \quad \Big| \cdot pq \cdot (pq + r) \cdot (pq + s)$$
$$pq \cdot (2pq + s + r) = (pq + r) \cdot (pq + s)$$
$$2p^2q^2 + pq \cdot s + pq \cdot r = p^2q^2 + pq \cdot s + pq \cdot r + r \cdot s \quad \Big| - p^2q^2 - pq \cdot s - pq \cdot r$$
$$p^2q^2 = r \cdot s$$

Da p und q nach Aufgabenstellung zwei verschiedene Primzahlen sind, besitzt p^2q^2 nur die folgenden Faktorisierungen:

(1) $1 \cdot (p \cdot q)^2$ ⇒. r = 1 und s = $(p \cdot q)^2$ ⇒ x = z+1 und y = z + z^2

(2) $p \cdot (p \cdot q^2)$ ⇒ r = p und s = $p \cdot q^2$ ⇒ x = z + p und y = z + $p \cdot q^2$

(3) $q \cdot (p^2 \cdot q)$ ⇒ r = q und s = $p^2 \cdot q$ ⇒ x = z + q und y = z + $p^2 \cdot q$

(4) $(p^2) \cdot (q^2)$ ⇒ r = p^2 und s = q^2 ⇒ x = z + p^2 und y = z + q^2

(5) $(pq) \cdot (pq)$ ⇒ r = pq und s = pq ⇒ x = z + pq = 2z und y = z + pq = 2z

Bei den restlichen Faktorisierungen ist r > s, was der Angabe widerspricht.

3. Lösung

Aus der Gleichung $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{pq}$ folgt $\frac{y+x}{xy}=\frac{1}{pq}$ oder $pq(x+y)=xy$.

Löst man dies nach y auf, so ergibt sich $$y=\frac{pqx}{x-pq}.$$

Hierbei sind sowohl $k=x-pq$ als auch y natürliche Zahlen, also ist k ein Teiler von $pqx=pq(pq+k)$. Somit ist jeder Primfaktor z von k ein Teiler von $p\cdot q$ oder von $p\cdot q+k$. Da z auch k teilt , ist z in jedem Fall ein Teiler von pq. Also z = p oder z = q.

Somit hat k die Primfaktorzerlegung $k=p^a\cdot q^b$ mit natürlichen Zahlen a und b. Zugleich ist $k\le pq$, denn aus $k>pq$ würde $y=\frac{pq(pq+k)}{k}<\frac{pq(pq+k)}{pq}=pq+k=x$ folgen. Das widerspricht der Voraussetzung $x\le y$.

Wir haben also $k=p^a\cdot q^b\le pq$. Außerdem p < q. Wegen $q^2>pq$ muss nun b < 2 sein.

Wenn b = 1 ist, so muss a = 0 oder a = 1 sein. denn für a = 2 wäre $k=p^2q>pq$.

Es bleibt der Fall b = 0, also $k=p^a$. Dann ist für $a\ge 2$

$$y=\frac{pq\left(pq+p^a\right)}{p^a}=\frac{p^2q\left(q+p^{a-1}\right)}{p^a}=\frac{q\left(q+p^{a-1}\right)}{p^{a-2}}.$$

Wäre $a\ge 3$, so müsste p ein Teiler von $q(q+p^{a-1})$ sein, insbesondere auch ein Teiler von q. Dies ist wegen $p\ne q$ unmöglich. Also ist $a\le 2$.

Insgesamt bleiben also fünf Möglichkeiten, die alle auch tatsächlich Lösungen der Gleichung ergeben:

1. $a=b=0$, also $k=1$. Dies ergibt die Lösung $x=pq+1,\ y=(pq+1)pq$.
2. $a=1,\ b=0$, also $k=p$. Dies ergibt die Lösung $x=pq+p,\ y=(pq+p)q$.
3. $a=2,\ b=0$, also $k=p^2$. Dies ergibt die Lösung $x=p(p+q),\ y=q(p+q)$.
4. $a=0,\ b=1$, also $k=q$. Dies ergibt die Lösung $x=pq+q,\ y=(pq+q)p$.
5. $a=b=1$, also $k=pq$. Dies ergibt die Lösung $x=2pq=y$.