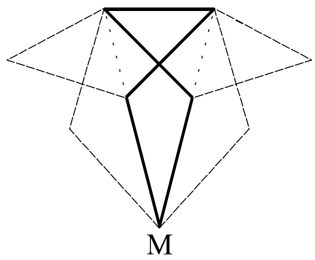
1. Landeswettbewerb Mathematik Bayern 1998/99

1. Runde - Aufgaben und Lösungen

Aufgabe 1

Helena möchte für Weihnachten Strohsterne aus gleich langen Strohhalmen basteln. Dazu will sie zunächst Elemente aus fünf gleich langen Strohhalmen wie in der Skizze anfertigen und diese um den Punkt M herum Seite an Seite aneinanderkleben.



Begründe, dass Helena auf diese Weise einen Strohstern basteln kann.

1. Lösung

Die Größe des Winkels bei M in einem Element aus Strohhalmen wird mit α bezeichnet. Wenn Helena die Elemente entsprechend der Aufgabenstellung aneinanderklebt, so liegen bei M lauter gleich große Winkel aneinander. Helena kann also nach diesem Verfahren genau dann einen lückenlosen, ebenen Strohstern basteln, wenn 360° ein ganzzahliges Vielfaches von α ist. Für die geforderte Begründung muss α durch geometrische Überlegungen bestimmt werden.

Da die verwendeten Strohhalme gleich lang sind, sind die Dreiecke CMA, MBD, ABC und CDB gleichschenklig. Aus der Gleichschenkligkeit dieser Dreiecke und dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck ergeben sich folgende Beziehungen:

w(DBM) = w(BMD) = α und w(MDB) = $180° - 2\alpha$.

Für die Größe des Nebenwinkels →BDC gilt w(BDC) = 2α.

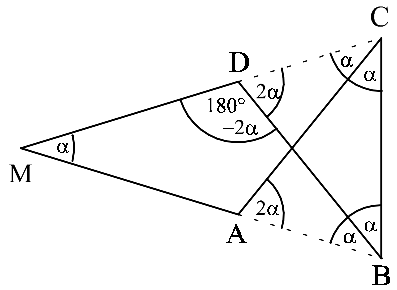
Dieser Winkel ist nun Basiswinkel im Dreieck CDB. Deshalb gilt auch w(DCB) = w(BDC) = 2α.

Entsprechend gilt auch:

w(MCA) = w(AMC) = α und w(CAM) = $180° - 2\alpha$.

Für die Größe des Nebenwinkels →BAC gilt w(BAC) = 2α.

Dieser Winkel ist nun Basiswinkel im Dreieck ABC. Deshalb gilt auch w(CBA) = w(BAC) = 2α.



Diese Winkelmaße sind in der nebenstehenden Figur wiedergegeben.

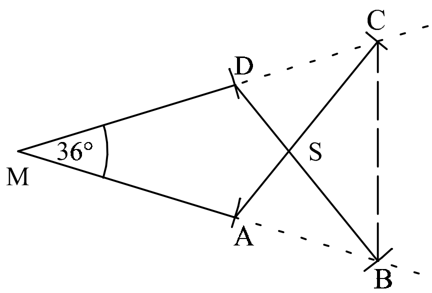
Für die Winkelsumme im Dreieck MBC gilt:

$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$, also $\alpha = 36°$.

360° ist also ein ganzzahliges Vielfaches von α. Helena kann aus 10 Elementen einen vollständigen Strohstern basteln.

2. Lösung

Nach Aufgabenstellung soll begründet werden, dass Helena aus mehreren Elementen einen Strohstern basteln kann.



Es wird gezeigt, dass bei einem Mittelpunktswinkel von 36° die vier Strohhalme gleicher Länge so angeordnet werden können, dass zwischen die Endpunkte B und C genau ein Strohhalm der gleichen Länge passt.

Zunächst zeichnen wir zwei Winkelschenkel mit dem gemeinsamen Anfangspunkt M und der Winkelgröße 36°. Ein Kreis um M mit Radius r schneidet die Winkelschenkel in den Punkten A und D. Der Kreis um A mit Radius r schneidet die Halbgerade (MD) ein zweites Mal im Punkt C. Der Kreis um D mit Radius r schneidet die Halbgerade (MA) ein zweites Mal im Punkt B.

Die Dreiecke MBD und CMA sind nach Konstruktion gleichschenklig mit einem Basiswinkel von 36°. Wegen der Winkelsumme von 180° gilt in diesen Dreiecken:

$$w(MDB) = w(CAM) = 180° - 2 \cdot 36° = 108°$$

Die Dreiecke MBD und CMA sind zueinander kongruent nach sws. Daraus folgt, dass die Seiten MB und MC gleich lang sind. Das Dreieck MBC ist deshalb ein gleichschenkliges Dreiecke mit einem 36°-Winkel an der Spitze.

Daraus folgt: $w(MCB) = w(CBM) = \frac{1}{2} \cdot (180° - 36°) = 72°$.

Dies bedeutet auch $w(CBA) = w(CBM) = 72°$.

Der Außenwinkel →BAC des Dreiecks MAC ist so groß wie die beiden nicht anliegenden Innenwinkel zusammen.
Es gilt deshalb $w(BAC) = 72°$.

Das Dreieck ABC ist also gleichschenklig mit der Schenkeln AC und BC.

Wegen $|BC| = |AC| = r$ ist damit gezeigt, dass zwischen die Punkte B und C ein Strohhalm der Länge r passt.

Da der Winkel bei M nach Voraussetzung eine Größe von 36° besitzt, kann Helena aus 10 Elementen einen Strohstern basteln.

Aufgabe 2

In ein Quadrat mit 100 Feldern werden die Zahlen 1 bis 100 der Reihe nach von links nach rechts, zeilenweise von oben nach unten eingetragen. Danach wird bei 50 Zahlen ein Minuszeichen so davor gesetzt, dass in jeder Zeile und in jeder Spalte jeweils fünf positive und fünf negative Zahlen stehen. Diese 100 Zahlen werden addiert.

Welches ist die kleinste Summe, die man bei diesem Verfahren erhalten kann?

Beobachtung

Bestimmen wir an einigen Zahlquadraten, bei denen die Vorzeichen in der geforderten Weise verteilt wurden, die Summe aller Zahlen, so erhalten wir stets den Wert 0. Daraus ergibt sich die Vermutung, dass die kleinste erreichbare Summe ebenfalls den Wert 0 besitzt. Dies soll nun nachgewiesen werden.

1. Lösung

Betrachten wir zunächst einmal ein Quadrat mit den 100 Feldern ohne die Anforderungen an die Vorzeichen der Zahlen zu berücksichtigen.

Das nebenstehende Quadrat mit den 100 Feldern können wir dadurch erzeugen, dass wir die Zahlen der beiden folgenden Quadrate zellenweise addieren.

1	2	3	...	10
11	12	13	...	20
	...			...
	...			...
	...			...
91	92	93	...	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

+

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
70	70	70	70	70	70	70	70	70	70
80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
90	90	90	90	90	90	90	90	90	90

Die Gesamtsumme aller Zahlen im Quadrat mit den Zahlen 1 bis 100 können wir auch dadurch bestimmen, dass wir im linken Teilquadrat die Summe der Zahlen in den 10 Spalten und im rechten Teilquadrat die Summe der Zahlen in den 10 Zeilen bilden. Dadurch wird jede Zahl des ursprünglichen Quadrats in seiner Zerlegung in zwei Summanden genau einmal in der Gesamtsumme berücksichtigt.

Die Gesamtsumme ändert sich nicht, da nur das Kommutativ- und das Assoziativgesetz der Addition angewendet wird.

Nun betrachten wir auch die Vorgaben für die Vorzeichen in den Zeilen und Spalten.

Wird nun eine Verteilung der Vorzeichen in dem ursprünglichen Quadrat entsprechend der Aufgabenstellung vorgenommen, so wird diese Verteilung in der Weise auf die beiden Teilquadrate übertragen, dass jedes Vorzeichen in einer Zelle auch für die entsprechende Zelle der beiden Teilquadrate gilt.

Nach Aufgabenstellung gibt es in jeder Zeile und in jeder Spalte genau fünf negative und genau fünf positive Zahlen. Betrachten wir die Zahlwerte im linken Teilquadrat spaltenweise, so ist die Summe der zehn Zahlen in jeder Spalte gleich 0, da in jeder dieser Zeilen genau fünf positive und fünf negative Zahlen mit dem gleichen Betrag stehen. Gleiches gilt für die Zeilen des rechten Teilquadrates.

Bilden wir also die Summe der Zahlen im linken Teilquadrat spaltenweise und die Summe der Zahlen im rechten Teilquadrat zeilenweise, so erhalten wir jeweils den Wert 0. Also ist auch die Gesamtsumme 0.

Da bis auf die Zerlegung und auf die Reihenfolge der Summanden jede Zahl des ursprünglichen Quadrates genau einmal in der Summe der Zahlen der beiden Teilquadrate vorkommt, ist die Summe der Zahlen im ursprünglichen Quadrat ***bei jeder Verteilung der Vorzeichen*** entsprechend der Aufgabenstellung gleich 0. Der kleinstmögliche Wert der Summe ist deshalb ebenfalls 0.

2. Lösung

Wir schauen uns zunächst die einzelnen Zeilen des Quadrates mit hundert Zahlen an. In der vierten Zeile stehen beispielsweise die Zahlen

$$30 + 1,\ 30 + 2,\ 30 + 3,\ 30 + 4,\ 30 + 5,\ 30 + 6,\ 30 + 7,\ 30 + 8,\ 30 + 9,\ 30 + 10,$$

wenn wir die Vorzeichen zunächst nicht berücksichtigen.

Fünf dieser Zahlen erhalten nach Aufgabenstellung das Minuszeichen als Vorzeichen. Bilden wir dann die Summe aller zehn der so entstandenen Zahlen der vierten Zeile, so kommt in der Summe die Zahl 30 fünfmal positiv und fünfmal negativ vor. Der Anteil an der Zeilensumme ist deshalb 0. So können wir auch in jeder anderen Zeile argumentieren. Diese gilt unabhängig davon, welche der fünf Zahlen mit einem Minuszeichen versehen sind.

Um die Gesamtsumme aus den 100 Feldern zu bestimmen, genügt es, ein vereinfachtes Zahlenschema zu betrachten, bei dem in jeder der zehn Zeilen die Zahlen von 1 bis 10 in dieser Reihenfolge stehen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
...									

Bisher wurde die Forderung noch nicht berücksichtigt, dass in jeder Spalte fünf positive und negative Zahlen stehen.

Für jede Zahl k von 1 bis 10 kommt in der k-ten Spalte fünfmal +k und fünfmal –k vor. Also ist auch die Summe der Zahlen in der k-ten Spalte 0. Da dies für alle Spalten gilt, ist auch die Gesamtsumme aller 100 Zahlen gleich 0. Die kleinstmögliche Summe aller Zahlen im Quadrat ist 0. Dieser Wert ist die einzig mögliche Summe, die man bei dem in der Aufgabenstellung genannten Verfahren erhalten kann.

3. Lösung

Wir nehmen zunächst einmal an, dass die Vorzeichen schachbrettartig wie im nebenstehenden Bild verteilt sind. Diese Verteilung der Vorzeichen erfüllt die Bedingungen der Aufgabenstellung, da in jeder Zeile und in jeder Spalte genau fünf positive und genau fünf negative Zahlen vorkommen. Bilden wir zeilenweise die Summe der zehn Zahlen, so erhalten wir von oben nach unten $-5, +5,\ \ldots$ Die Gesamtsumme ist 0.

+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
–	+	–	+	–	+	–	+	–	+
+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
–	+	–	+	–	+	–	+	–	+
+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
–	+	–	+	–	+	–	+	–	+
+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
–	+	–	+	–	+	–	+	–	+
+	–	+	–	+	–	+	–	+	–
–	+	–	+	–	+	–	+	–	+

Ausgehend von einer beliebigen zulässigen Verteilung der Vorzeichen wird nun gezeigt, dass die oben beschriebene schachbrettartige Verteilung schrittweise ohne Änderung der Gesamtsumme erreicht werden kann.

Betrachten wir die Stellen, an denen in der neuen Verteilung ein +, in der Schachbrett-Verteilung aber ein – steht. Wir nennen sie +/- Stellen. Entsprechend erklären wir -/+ Stellen. In jeder Zeile und jeder Spalte müssen gleich viele +/- Stellen wie -/+ Stellen vorkommen, da es jeweils fünf positive und fünf negative Zahlen gibt.

Wir können also jeder +/- Stelle einer Zeile eine bestimmte -/+ Stelle in der gleichen Zeile zuordnen. Es sei z_1 die erste Zeile, in der es eine Abweichung zwischen der neuen Verteilung und der Schachbrett-Verteilung gibt. Zwei einander so zugeordnete Stellen befinden sich z.B. in Spalten s_1 bzw. s_2. Wir kehren an beiden Stellen das Vorzeichen um. Für z_1 bleibt die Vorzeichenbilanz korrekt. In Spalte s_1 stehen nun sechs Minus- und vier Pluszeichen, in Spalte s_2 dagegen vier Minus- und sechs Pluszeichen (oder umgekehrt). In mindestens zwei Zeilen muss daher in s_1 ein Minuszeichen, in s_2 aber ein Pluszeichen stehen. Bis zur Zeile z_1 einschließlich tritt aber bei der Schachbrett-Verteilung in den Spalten s_1 bzw. s_2 ein Überschuss von maximal einem Minus- bzw. Pluszeichen auf. Also muss unterhalb von z_1 eine Zeile z_2 liegen, in der in s_1 bzw. s_2 ein Minus- bzw. ein Pluszeichen steht. An diesen Stellen kehren wir ebenfalls die Vorzeichen um.

Diesen Vorgang wiederholen wir für jedes Paar einander zugeordneter +/- und -/+ Stellen in der Zeile z_1. Danach stimmt diese Zeile mit der Schachbrett-Verteilung überein.

Dieses Verfahren wiederholen wir Zeile für Zeile. So erhalten wir schließlich die Schachbrett-Verteilung. (Stimmen die ersten neun Zeilen mit der Schachbrettverteilung überein, so gilt dies wegen der Vorzeichenregel für jede Spalte automatisch auch für die zehnte Zeile.)

Wir haben nun noch nachzuweisen, dass sich bei den betrachteten Änderungen die Gesamtsumme der hundert Zahlen nicht ändert. Dazu genügt es, einen beliebigen Vorzeichentausch zu betrachten:

(Zeile z_1, Spalte s_1) (Zeile z_1, Spalte s_2)

(Zeile z_2, Spalte s_1) (Zeile z_2, Spalte s_2)

Sind a_1 bzw. a_2 die Zeilennummern und b_1 bzw. b_2 die Spaltennummern, so lassen sich die Beträge der Zahlen in den Zellen durch

$$|10(a_1 - 1) + b_1|,\ |10(a_1 - 1) + b_2|,\ |10(a_2 - 1) + b_1| \text{ und } |10(a_2 - 1) + b_2|$$

darstellen. Berücksichtigen wir die wechselnden Vorzeichen in den gleichen Zeilen bzw. in den gleichen Spalten, so erhalten wir beispielsweise für die Vorzeichenverteilung

+	–
–	+

die Summe $10(a_1 - 1) + b_1 - 10(a_1 - 1) - b_2 - 10(a_2 - 1) - b_1 + 10(a_2 - 1) + b_2 = 0$.

Bei der anderen Vorzeichenverteilung erfolgt eine Vorzeichenumkehr jedes Summanden. Damit ist auch in diesem Falle die Summe ebenfalls 0.

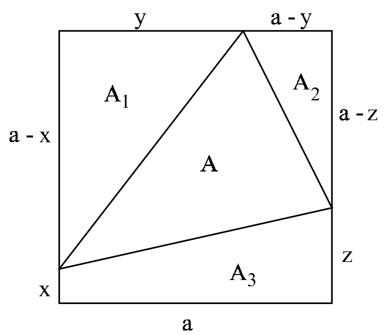
Damit ist gezeigt, dass alle betrachteten Summen den Wert 0 haben.

Aufgabe 3

Die Eckpunkte eines Dreiecks liegen auf den Seiten eines Quadrats.
Welches ist der größtmögliche Flächeninhalt, den ein solches Dreieck haben kann?

1. Lösung

1. Fall



Die Ecken des Dreiecks liegen auf drei verschiedenen Seiten des Quadrats. Für die Streckenlängen x, y und z gelte $0 \le x, y, z \le a$.

Die Dreiecksfläche A wird am größten, wenn die Summe $A_1 + A_2 + A_3$ am kleinsten ist.

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2}\left[y \cdot (a - x) + (a - z) \cdot (a - y) + a \cdot (x + z)\right]$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{1}{2}\left[ay - xy + a^2 - az - ay + yz + ax + az\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[a^2 + ax - xy + yz\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[a^2 + x \cdot (a - y) + yz\right]$$

Keiner der drei Summanden in der Klammer ist negativ. Die Summe von drei positiven Zahlen wird minimal, wenn jeder der drei Summanden minimal ist. Der erste Summand a^2 ist konstant. Die Summanden $x \cdot (a - y)$ und y∃z sind nach den einschränkenden Bedingungen für x, y und z mindestens 0. Der kleinste Wert wird für $x \cdot (a - y) = 0$ und $yz = 0$ angenommen. Diese Bedingungen sind für

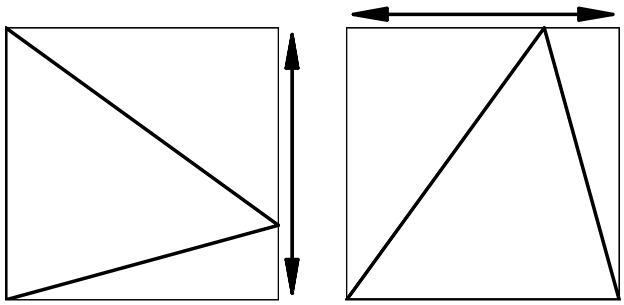
$x = 0 \quad \wedge \quad y = 0$, z beliebig

$x = 0 \quad \wedge \quad z = 0$, y beliebig

$y = a \quad \wedge \quad z = 0$, x beliebig

erfüllt.

Die nachfolgenden Bilder zeigen die drei Fälle, wobei die Doppelpfeile andeuten, dass dieser Eckpunkt auf der betreffenden Quadratseite beliebig festgelegt werden darf.

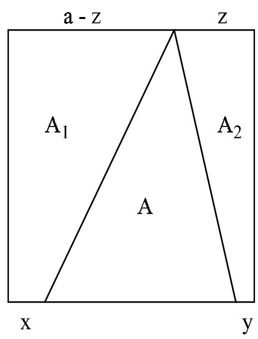


Der Flächeninhalt ist in diesen Fällen stets $\frac{1}{2}a^2$.

2. Fall

Zwei Punkte des Dreiecks liegen auf der gleichen Quadratseite. Es gilt $x, y, z \geq 0$, $z \leq a$ und $x + y < a$.

Für den Inhalt A der Dreiecksfläche gilt:

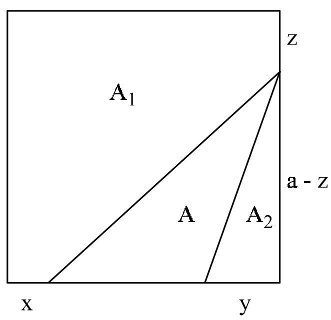


$$A = \frac{1}{2} \cdot (a - (x + y)) \cdot a .$$

Der Flächeninhalt ist unabhängig von der Wahl von z.

Der Term in der Klammer ist immer positiv, da x + y < a ist. Da die Faktoren $\frac{1}{2}$ und a konstant sind, wird das Produkt maximal, wenn der Term $a - (x + y)$ möglichst groß wird. Dies ist dann der Fall, wenn x + y minimal wird. Dies ist wegen $x, y \geq 0$ für x = y = 0 der Fall.

Als Flächeninhalt erhalten wir wieder $A = \frac{1}{2}a^2$.



Eine weitere Möglichkeit für die Lage der Eckpunkte des Dreiecks wird durch das nebenstehende Bild angegeben.

Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot (a - x - y) \cdot (a - z)$

Unter den einschränkenden Bedingungen für die Streckenlängen x, y und z sind beide Klammernterme mindestens 0. Das Produkt wird maximal, wenn jeder der Faktoren unter Berücksichtigung der einschränkenden Bedingungen maximal wird. Dies ist für $x = y = z = 0$ der Fall. Das Dreieck ist dann ein halbes Quadrat.

Zusammenfassung:

In allen Fällen müssen zwei Eckpunkte des Dreiecks mit Eckpunkten des Quadrats zusammenfallen. Der dritte Eckpunkt des Dreiecks kann dann mit einer der beiden anderen Quadratecken zusammenfallen oder auf deren Verbindungsstrecke liegen.

2. Lösung

Hinsichtlich der Lage der drei Eckpunkte des Dreiecks gibt es zwei verschiedene Ausgangssituationen:

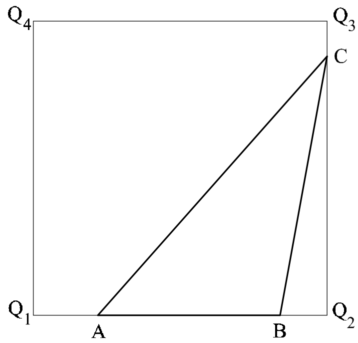
Zwei Eckpunkte liegen auf einer Quadratseite, der dritte auf einer anderen Quadratseite.

Alle drei Eckpunkte liegen auf verschiedenen Quadratseiten.

1. Fall

Zwei Eckpunkte A und B liegen auf einer Quadratseite, C liegt auf einer benachbarten Quadratseite.

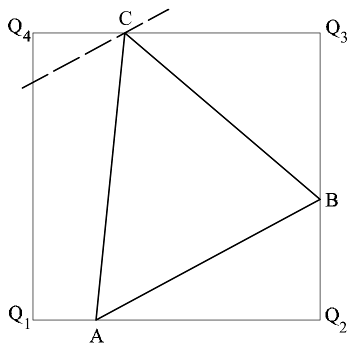
Halten wir die Grundseite AB des Dreiecks fest und bewegen C nach Q_3, so nimmt die zugehörige Höhe zu und der Flächeninhalt des Dreiecks ABC wächst. Für $C = Q_3$ ist der Inhalt bei fest vorgegebener Grundseite AB maximal.



Das Dreieck ABQ_3 wird nun weiter dadurch vergrößert, dass wir A auf Q_1 und B auf Q_2 zu bewegen. Dadurch wird die Grundseite länger, während die Höhe bezüglich dieser Grundseite unverändert bleibt. Der Flächeninhalt des Dreiecks wächst. Die Länge der Grundseite wird maximal, wenn $A = Q_1$ und $B = Q_2$ ist.

Auf diese Weise erhalten wir ausgehend von der vorgegebenen Lage der Punkte A, B und C das Dreieck mit dem größtmöglichen Flächeninhalt, wenn $A = Q_1$, $B = Q_2$ und $C = Q_3$ ist. Dieser Flächeninhalt ist halb so groß wie der Inhalt des Quadrats.

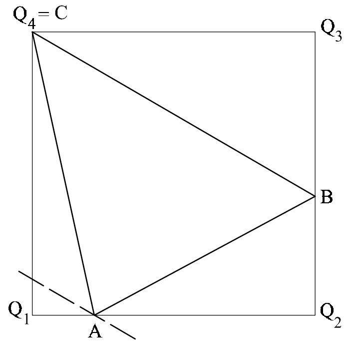
Liegt C zu Beginn bereits auf der Quadratseite Q_3Q_4, so ist die zur Grundseite AB gehörende Höhe bereits maximal. Die weiteren Überlegungen verlaufen entsprechend.



2. Fall

Jeder Eckpunkt des Dreiecks liegt auf einer anderen Quadratseite. Es kann angenommen werden, dass A und B auf benachbarten Seiten liegen.

Da A und B auf benachbarten Seiten des Quadrats liegen, ist AB sicher zu keiner Quadratseite parallel. Wenn A und B fest gehalten werden und sich C auf Q_3 Q_4 bewegt, so ändert sich die zu AB gehörende Höhe. Von allen Punkten auf der Strecke Q_3Q_4 hat Q_4 den größten Abstand von der Geraden (AB). Die Höhe wird größer, wenn C nach Q_4 wandert. Die Höhe wird maximal, wenn $C = Q_4$ gilt. Das Dreieck ABC hat für $C = Q_4$ bei vorgegebenem AB den maximalen Flächeninhalt.

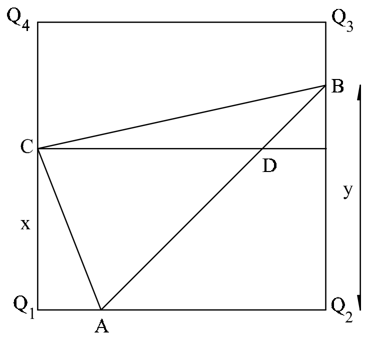


Nun halten wir BC, d.h. BQ_4, fest. Die zu BC gehörende Höhe wird beständig größer, wenn A auf Q_1 zu bewegt wird. Das Maximum für diese Höhe wird für $A = Q_1$ erreicht.

Bei der angegebenen Ausgangssituation erhalten wir also den maximalen Flächeninhalt, wenn $A = Q_1$,
$C = Q_4$ und B beliebig auf Q_2Q_3 liegt. Dieser Inhalt ist halb so groß wie der Inhalt des Quadrats.

Zusammenfassung:
Wenn die Eckpunkte eines Dreiecks auf den Seiten eines Quadrats liegen, dann kann der Flächeninhalt dieses Dreiecks höchstens halb so groß wie der Inhalt des Quadrates sein.

3. Lösung



Es sei A ein Punkt der Quadratseite Q_1Q_2. Der Punkt B sei von der Geraden (Q_1Q_2) mindestens so weit entfernt wie der Punkt C, d.h. $x \le y$. (Sonst vertausche man im Folgenden die Bedeutung der Punkte B und C.)

Die Parallele zu Q_1Q_2 durch C teilt das Dreieck ABC in zwei Dreiecke mit der gemeinsamen Grundseite CD und den Höhen x und $y - x$.

Für den Flächeninhalt I des Dreiecks ABC ist also

$I = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot (x + y - x) = \frac{1}{2} \cdot |CD| \cdot y$. Der Punkt D liegt auf der Strecke AB und damit im Innern oder auf einer Seite des Quadrats.

Deshalb gilt $|CD| \le |Q_1Q_2|$ und ebenso $y \le |Q_2Q_3| = |Q_1Q_2|$.

Also kann das Dreieck höchstens den Inhalt $\frac{1}{2} \cdot |Q_1Q_2|^2$ haben. Dieser Wert wird für $A = Q_1$, $B = Q_3$ A und $C = Q_4$ auch tatsächlich erreicht.

Aufgabe 4

Das Produkt aller Teiler einer natürlichen Zahl $n > 1$ ist n^3.

Wie viele Primfaktoren kann n haben und wie oft kann jeder Primfaktor vorkommen?

1. Lösung

1. Fall Die Zahl n ist Potenz einer einzigen Primzahl p.

Wir betrachten Zahlen der Form $n = p^k$:

	Teiler	Produkt der Teiler	Vergleich mit n^3
$n = p$	1, p	p	$n^3 \ne p$
$n = p^2$	$1, p, p^2$	p^3	$n^3 \ne p^3$
$n = p^3$	$1, p, p^2, p^3$	p^6	$n^3 \ne p^6$
$n = p^4$	$1, p, p^2, p^3, p^4$	p^{10}	$n^3 \ne p^{10}$
$n = p^5$	$1, p, p^2, p^3, p^4, p^5$	p^{15}	$n^3 = p^{15}$
$n = p^6$	$1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6$	p^{21}	$n^3 \ne p^{21}$

Jede weitere Erhöhung des Exponenten k um 1 vergrößert den Exponenten von p beim Produkt aller Teiler von n um $k + 1$, also um mindestens 7. Bei der Berechnung von n^3 wird der Exponenten aber jeweils nur um 3 erhöht; deshalb müssen keine höhere Exponenten von p berücksichtigt werden.

1. Zwischenergebnis: Ist n die Potenz einer einzigen Primzahl p, so ist $n = p^5$ die einzige Lösung, bei der das Produkt aller Teiler den Wert n^3 besitzt.

2. Fall Die Primfaktorzerlegung von n enthält zwei verschiedene Primfaktoren p und q.

	Teiler	Produkt der Teiler	Vergleich mit n^3
$n = p \cdot q$	$1, p, q, p \cdot q$	$p^2 \cdot q^2$	$n^3 \ne p^2 \cdot q^2$
$n = p^2 \cdot q$	$1, p, q, p^2, p \cdot q, p^2 \cdot q$	$p^6 \cdot q^3$	$n^3 = p^6 \cdot q^3$
$n = p^2 \cdot q^2$	$1, p, p \cdot q, p \cdot q^2, p^2, p^2 \cdot q, p^2 \cdot q^2, q, q^2$	$p^9 \cdot q^9$	$n^3 \ne p^9 \cdot q^9$
$n = p^3 \cdot q$	$1, p, p^2, p^3, q, p \cdot q, p^2 \cdot q, p^3 \cdot q$	$p^{12} \cdot q^4$	$n^3 \ne p^{12} \cdot q^4$

Jede weitere Erhöhung eines oder beider Exponenten um 1 führt zu einer Erhöhung der Exponenten von p oder q im Produkt der Teiler um mindestens 4. Da sich eine Erhöhung des Exponenten um 1 bei der

Bestimmung von n^3 aber nur als Erhöhung um 3 auswirkt, brauchen höhere Exponenten der Potenzen von p und q nicht mehr berücksichtigt werden.

2. Zwischenergebnis: Kommen in der Primfaktorzerlegung von n genau zwei verschiedene Primfaktoren vor, so ist $n = p^2 \cdot q$ die einzige Lösung, bei der das Produkt aller Teiler den Wert n^3 besitzt.

3. Fall Die Zahl n enthält mehr als zwei verschiedene Primfaktoren p und q. Die Zahl n lässt sich dann als $n = p \cdot q \cdot m$ darstellen. Der Faktor m enthält mindestens einen von p und q verschiedenen Primfaktor. Außerdem können in m eventuell weitere Primfaktoren p oder q enthalten sein.

Die Zahl n hat mindestens die Teiler 1, p, q, m, $p \cdot q$, $p \cdot m$, $q \cdot m$ und $p \cdot q \cdot m$. Diese Teiler sind alle verschieden. Das Produkt aller Teiler ist deshalb mindestens $p^4 \cdot q^4 \cdot r^4$ und damit größer als n^3.

Zusammenfassung: Das Produkt aller Teiler einer natürlichen Zahl $n > 1$ ist genau dann n^3, wenn sich n in der Form $n = p^5$ oder $n = p^2 \cdot q$ $(p \neq q)$ darstellen lässt.

2. Lösung

Zu jedem Teiler t einer natürlichen Zahl n gibt es einen Komplementärteiler t' so, dass $t{\cdot}t' = n$ ist. Damit das Produkt aller Teiler mit n^3 übereinstimmt, muss es drei verschiedene Paare von Teiler und Komplementärteiler geben. Wir müssen also nach natürlichen Zahlen n suchen, die genau sechs Teiler besitzen.

Besitzt n genau einen Primteiler p, so hat $n = p^5$ die sechs Teiler 1, p, p^2, p^3, p^4 und p^5. Das Produkt der Teiler ist p^{15} und damit gleich n^3. Ist der Exponent von p ungleich 5, so ist die Anzahl der Paare Teiler/Komplementärteiler von 3 verschieden. Das Produkt aller Paare ist dann von n^3 verschieden.

Besitzt n zwei verschiedene Primteiler p und q, so hat $n = p{\cdot}q^2$ die sechs Teiler 1, p, q, $p{\cdot}q$, q^2 und $p{\cdot}q^2$. Die sechs Teiler lassen sich wieder zu drei Paaren von Teilern und Komplementärteilern kombinieren. Das Produkt der Teiler ist $p^3{\cdot}q^6$, also n^3. Bei einer anderen Verteilung der Exponenten von p und q ist die Anzahl der Teiler von sechs verschieden, da die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl $n = p^r \cdot q^s$ mit zwei verschiedenen Primfaktoren p und q gleich dem Produkt $(r+1)\cdot(s+1)$ ist.

Hat n mehr als zwei Primteiler, z. B. die drei Primteiler p, q, r, so gibt es mindestens die acht Teiler 1, n, p, p', q, q', r, r' (p' ist der Komplementärteiler von p, usw.), die paarweise verschieden sind. Das Produkt der Teiler ist größer als n^3.

Zusammenfassung:

Eine natürliche Zahl $n > 1$, bei der das Produkt aller Teiler n^3 ist, kann einen Primteiler mit fünf Faktoren oder zwei Primteiler besitzen, wobei der eine einmal und der andere zweimal vorkommt.

Aufgabe 5

Bei welchen Dreiecken liegen die Mittelpunkte der drei Höhen auf einer Geraden?

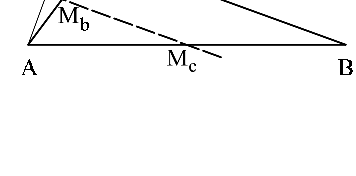
Vorüberlegungen

1. Jeder Mittelpunkt einer Dreieckshöhe liegt nach dem Strahlensatz auf der Trägergeraden einer Mittellinie des Dreiecks ABC.

   Begründung:

   Die Gerade (M_cM_b) ist parallel zur Dreiecksseite BC und halbiert die Strecken AC und AB. Jede andere Strecke AP mit $P \in (BC)$ wird durch den Schnittpunkt mit (M_cM_b) ebenfalls halbiert.

   Da der Höhenfußpunkt H_a auf der Geraden (BC) liegt, liegt der Mittelpunkt der Strecke AH_a auf der Geraden (M_bM_c).



2. Es ist nicht möglich, dass die Mittelpunkte von zwei Dreieckshöhen zusammenfallen.

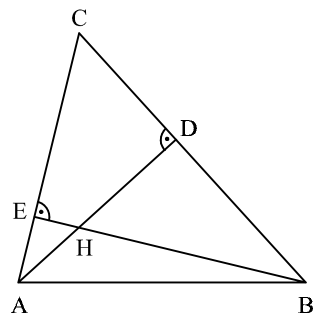
   Begründung:

   Der Schnittpunkt der beiden Dreieckshöhen ist der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks. Wäre H der Mittelpunkt von zwei Höhen, so würde |AH| = |HD| und |BH| = |HE| gelten.

   Im rechtwinkligen Dreieck AHE wäre AH als Hypotenuse die längste Seite, es würde deshalb |AH| > |HE| gelten. Entsprechend würde im rechtwinkligen Dreieck HBD die Eigenschaft |HB| > |HD| gelten.

   Aus |AH| = |HD|, |BH| = |HE| und |AH| > |HE| folgt aber |HD| > |BH|.

   Dies ist ein Widerspruch.



Bei der Lösung kann also davon ausgegangen werden, dass die Höhenmittelpunkte eines Dreiecks drei voneinander verschiedene Punkte sind.

Lösung

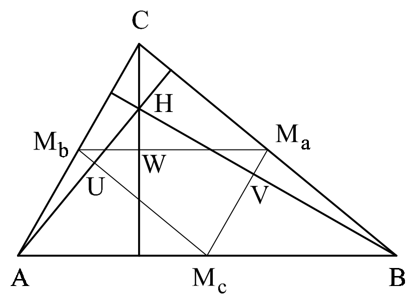
Die Eckpunkte in einem Dreieck seien so benannt, dass → ACB der größte Winkel ist. Im Dreieck ABC sind das Mittendreieck $M_aM_bM_c$ und die Höhen mit dem Höhenschnittpunkt H eingezeichnet. Der Winkel →ACB sei der größte Winkel im Dreieck. Aus dem Unterricht werden folgende Zusammenhänge als bekannt vorausgesetzt:

Für $\gamma < 90°$ liegt H im Innern des Dreiecks ABC.
Für $\gamma = 90°$ fallen H und C zusammen.
Für $\gamma > 90°$ liegt H außerhalb des Dreiecks ABC.

Wir betrachten nun nacheinander diese drei Fälle:

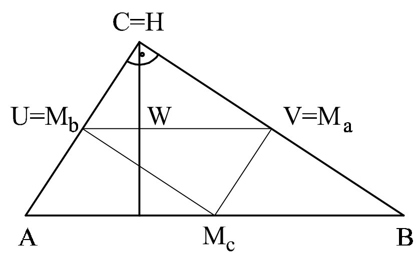
1. Fall

Wenn H im Innern des Dreiecks liegt, dann verlaufen die drei Höhen vollständig im Innern des Dreiecks ABC. Die Schnittpunkte U, V und W der Höhen mit dem Mittendreieck $M_aM_bM_c$ sind deshalb innere Punkte der Dreiecksseiten des Mittendreiecks. Als innere Punkte der Seiten eines Dreiecks können die drei Punkte U, V und W nicht auf einer Geraden liegen.



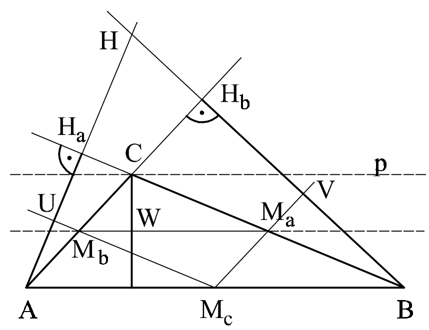
2. Fall

Bei einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90°$) fallen der Höhenschnittpunkt H und der Eckpunkt C zusammen. Die Höhen von A auf (BC) und von B auf (AC) stimmen mit Dreiecksseiten überein. Die Mittelpunkte U und V der Höhen sind die Seitenmittelpunkte M_b und M_a. Da W auf der Seite M_aM_b liegt, liegen die Punkte U, V und W auf einer Geraden.



3. Fall

Ist $\gamma > 90°$, so verlaufen die Höhen von A auf (BC) und von B auf (AC) außerhalb des Dreiecks ABC. Die Höhenfußpunkte H_a und H_b liegen in der Verlängerung der Dreiecksseiten BC und AC und deshalb oberhalb der Parallelen p zu AB durch C. Die Mittelpunkte V und U der Höhen liegen deshalb beide oberhalb der Mittelparallelen M_aM_b von (AB) und p. Da außerdem H_b und H_a und damit auch U und V auf verschiedenen Seiten der Geraden (CH) liegen, können die Punkte U, V und W nicht auf einer Geraden liegen.



Zusammenfassung:
Die drei Mittelpunkte der Höhen liegen genau dann auf einer Geraden, wenn das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

Aufgabe 6

Beginnend mit einer natürlichen Zahl werden fortlaufend neue Zahlen dadurch gebildet, dass die Einerziffer abgetrennt und dann deren Vierfaches zur verbleibenden Zahl addiert wird.

Beispiel:

$393 \quad \to \quad 51 \; (= 39 + 4{\cdot}3) \quad \to \quad 9 \; (= 5 + 4{\cdot}1) \quad \to \quad 36 \; (= 0 + 4{\cdot}9) \quad \to \quad \ldots$

Zeige: Wenn in einer solchen Zahlenfolge die Zahl 1001 vorkommt, dann gibt es in ihr keine Primzahl.

Lösung

Wir nehmen an, dass die Zahl 1001 in der Folge vorkommt.

Berechnen wir zunächst die Zahlen, die dann in der Folge nach der Zahl 1001 vorkommen:

Nach dem Bildungsgesetz der Folge entsteht als nächste Zahl 104 als $100 + 1 \cdot 4$, dann 26 als $10 + 4 \cdot 4$. Von jetzt an wiederholt sich wegen $2 + 6 \cdot 4 = 26$ die Zahl 26. Nach dem Auftreten der Zahl 1001 kommen also nur noch die Zahlen 104 und 26 in der Folge vor. Beide sind keine Primzahlen.

Es könnte aber sein, dass vor dem Auftreten der Zahl 1001 eine Primzahl in der Folge enthalten ist. Dies soll jetzt ausgeschlossen werden.

Aus den Primfaktorzerlegungen der Zahlen 1001, 104 und 26 können wir erkennen, dass alle drei Zahlen den Primfaktor 13 enthalten:

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13; \quad 104 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13 \quad \text{und} \quad 26 = 2 \cdot 13$$

Es wird nun gezeigt, dass jede Zahl der Folge vor 1001 ein Vielfaches von 13 ist.

Es seien a und b zwei aufeinander folgende Zahlen der Folge. Die Zahl a lässt sich in der Form $a = 10 \cdot n + m$ mit $n, m \in N_0$, $0 \le m \le 9$ darstellen. Nach der Aufgabenstellung gilt $b = n + 4 \cdot m$. Ersetzen wir n in der Darstellung von a durch den Term $b - 4 \cdot m$, so entsteht mit anschließender Vereinfachung

$$a = 10 \cdot (b - 4 \cdot m) + m = 10b - 39m\,.$$

Ist b durch 13 teilbar, so sind beide Summanden auf der rechten Seite durch 13 teilbar und damit auch die Zahl a. Ist b nicht durch 13 teilbar, so ist auch a nicht durch 13 teilbar.

Da 1001 durch 13 teilbar ist, müssen alle Folgeglieder, die der Zahl 1001 vorausgingen, ebenfalls durch 13 teilbar sein. Unter den Vielfachen von 13 ist aber 13 selbst die einzige Primzahl. Wenn in der Zahlenfolge überhaupt eine Primzahl vorkommt, dann kann es nur die Zahl 13 sein.

Auf die Zahl 13 folgt mit dem angegebenen Bildungsgesetz wieder die Zahl 13, denn es gilt

$$13 \quad \to \quad 13 \; (= 1 + 4 \cdot 3) \quad \to \quad 13 \quad \to \quad \ldots$$

Dies bedeutet, dass nach dem erstmaligen Auftreten der einzigen, theoretisch möglichen Primzahl 13 die Zahlenfolge nur noch aus dieser Zahl bestehen würde. Die Zahl 1001 kann dann nicht mehr auftreten. Zusammenfassend können wir daraus folgern, dass weder vor noch nach der Zahl 1001 eine Primzahl in der Folge auftreten kann.