Landeswettbewerb Mathematik Bayern

Aufgaben und Lösungsbeispiele 2. Runde 2007/2008

Aufgabe 1

In der nebenstehenden Gleichung steht jeder Buchstabe für eine der Ziffern 1 bis 9, wobei keine Ziffern mehrfach vorkommt.

$$\begin{array}{r} ABC \\ \underline{+\ DEF} \\ GHI \end{array}$$

Zeige, dass die Zahl GHI durch 9 teilbar ist, und bestimme ihren kleinstmöglichen Wert:

Beweis, dass GHI durch 9 teilbar ist:

Vorschlag 1:

Es gilt: $A + B + C + D + E + F + G + H + I = 1 + 2 + \ldots + 9 = 45$
Somit gilt: $A + B + C + D + E + F = 45 – (G + H + I)$ (*)

Fall 1: Bei der Additionsaufgabe findet kein Übertrag statt.

Dann ist $C + F = I$, $B + E = H$ und $A + D = G$.
In die Gleichung (*) eingesetzt, erhält man: $G + H + I = 45 – (G + H + I)$

$$\Leftrightarrow \quad 2\cdot(G + H + I) = 45$$
$$\Leftrightarrow \quad G + H + I = 22{,}5$$

Da G, H und I ganzzahlig sind, stellt dies einen Widerspruch dar.

Fall 2: Bei der Additionsaufgabe findet genau an einer Stelle ein Übertrag statt:

1. Möglichkeit: Der Übertrag erfolgt von der Einer- auf die Zehnerstelle.
Dann ist $C + F = I + 10$, $B + E = H - 1$ und $A + D = G$.
In die Gleichung (*) eingesetzt, erhält man:

$$G + H + I + 10 = 45 – (G + H + I)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\cdot(G + H + I) = 36$$
$$\Leftrightarrow \quad G + H + I = 18$$

Somit beträgt die Quersumme der Zahl GHI 18.
D.h. GHI ist durch 9 teilbar

2. Möglichkeit: Der Übertrag erfolgt von der Zehner- auf die Hunderterstelle.
Dann ist $C + F = I$, $B + E = H + 10$ und $A + D = G – 1$.
In die Gleichung (*) eingesetzt, erhält man:

$$G + H + I + 10 – 1= 45 – (G + H + I)$$

Analog zur 1. Möglichkeit erhält man, dass nun ebenfalls die Zahl GHI die Quersumme 18 hat und damit durch 9 teilbar ist.

Fall 3: Bei der Additionsaufgabe finden zwei Überträge statt:

Dann ist
$C + F = I + 10$, $B + E + 1 = H + 10$, d.h. $B + E = H + 9$, und $A + D = G – 1$.
In die Gleichung (*) eingesetzt, erhält man:

$$G + H + I + 10 + 9 – 1 = 45 – (G + H + I)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\cdot(G + H + I) = 27$$
$$\Leftrightarrow \quad G + H + I = 13{,}5$$

Da G, H und I ganzzahlig sind, stellt dies einen Widerspruch dar.

Es ist nach Aufgabenstellung nicht möglich, dass ein Übertrag von der Hunderter- zur Tausenderstelle stattfindet.

Somit ist die gestellte Additionsaufgabe nur mit genau einem Übertrag (entweder aus der Einer- oder aus der Zehnerstelle) lösbar. Damit ist jeweils GHI durch 9 teilbar.

Vorschlag 2 (unter Verwendung von Gleichung (*) aus Vorschlag 1):

Es gilt: $ABC = 100 \cdot A + 10 \cdot B + C$, $DEF = 100 \cdot D + 10 \cdot E + F$, $GHI = 100 \cdot G + 10 \cdot H + I$

Also: $100 \cdot A + 100 \cdot D + 10 \cdot B + 10 \cdot E + C + F = 100 \cdot G + 10 \cdot H + I$
$\Leftrightarrow \quad 99 \cdot A + 99 \cdot D + 9 \cdot B + 9 \cdot E + A + B + C + D + E + F = 99 \cdot G + 9 \cdot H + G + H + I$
$\Leftrightarrow \quad 99 \cdot A + 99 \cdot D - 99 \cdot G + 9 \cdot B + 9 \cdot E - 9 \cdot H = G + H + I – (A + B + C + D + E + F)$
Mit Gleichung (*) gilt:
$9 \cdot (11 \cdot A + 11 \cdot D - 11 \cdot G + B + E – H) = G + H + I – [45 – (G + H + I)]$
$\Leftrightarrow \quad 9 \cdot (11 \cdot A + 11 \cdot D - 11 \cdot G + B + E – H) = 2 \cdot (G + H + I) – 45$
Da der Term auf der linken Seite der Gleichung und die Zahl 45 durch 9 teilbar sind, folgt: $2 \cdot (G + H + I)$ und damit auch $G + H + I$ sind durch 9 teilbar.
Somit ist die Zahl GHI durch 9 teilbar.

Vorschlag 3:

Zunächst werden die Zahlen ABC, DEF und GHI als Vielfache von 9 mit Rest dargestellt:
$ABC = a \cdot 9 + r \qquad DEF = b \cdot 9 + s \qquad GHI = c \cdot 9 + t \qquad (a, b, c, r, s, t \in \mathbb{N})$
Für die “Neunerreste” r, s und t gilt zudem: $0 \leq r, s, t \leq 8$.
Aus ABC + DEF = GHI folgt damit: $(a + b) \cdot 9 + r + s = c \cdot 9 + t$.
Damit besteht zwischen r, s und t folgender Zusammenhang:
Fall 1: $r + s = t$, falls $r + s < 9$,
Fall 2: $r + s = 9 + t$, falls $r + s > 9$.
Da der Rest einer natürlichen Zahl n bei Division durch 9 stets mit dem Rest übereinstimmt, der bei Division der Quersumme von n durch 9 entsteht, gibt es natürliche Zahlen x, y und z mit:
$A + B + C = x \cdot 9 + r; \quad D + E + F = y \cdot 9 + s; \quad G + H + I = z \cdot 9 + t$
Da die Summe aller Ziffern den Wert 45 hat, erhält man damit:
$A + B + C + D + E + F + G + H + I = (x + y + z) \cdot 9 + r + s + t = 45$.
Unter Beachtung der beiden möglichen Fälle folgt daraus:
Fall 1: $(x + y + z) \cdot 9 + 2 \cdot t = 45$ Fall 2: $(x + y + z +1) \cdot 9 + 2 \cdot t = 45$.
In jedem Fall folgt, dass $2 \cdot t$ durch 9 teilbar ist. Dies ist nur für $t = 0$ möglich.
Damit ist gezeigt, dass GHI durch 9 teilbar ist.

Bestimmung des kleinstmöglichen Wertes für GHI:

Fall 1: G = 3, d.h. A = 1 und D = 2 und kein Übertrag von der Hunderterstelle

Die einzige Belegung der Zehnerstellen wäre dann 4 + 5 = 9 ohne Übertrag von der Einerstelle.
Dies ist aber nicht möglich, da jeder Belegung der Einerstellen in C + F = I mit den verbleibenden Ziffern 6, 7, 8 immer einen Übertrag auf die Zehnerstelle zur Folge hätte.

Fall 2: G = 4, d.h. A = 1 und D = 2 oder A = 1 und D = 3, d.h. mindestens eine der Ziffern 2 oder 3 ist bereits auf einer Hunderterstelle vergeben.

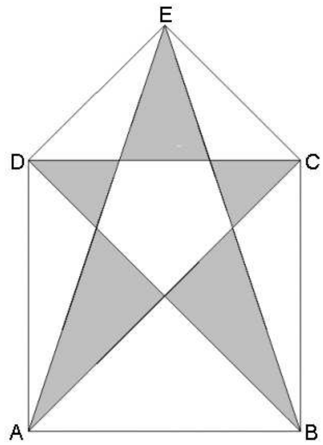
Die ersten durch 9 teilbaren Zahlen 405, 414, 423, 432, 441 und 450 scheiden aus, da sie bereits vergebene Ziffern oder die Ziffern 0 enthalten.

Die nächst größere Zahl 459 ergibt die gesuchte Lösung: **173 + 286 = 459.**

Aufgabe 2

In der Abbildung ist ABCD ein Quadrat, die Strecken [DE] und [AC] sowie [BD] und [CE] sind jeweils parallel.

Bestimme das Verhältnis der Flächeninhalte des schraffierten Sterns und des in der Mitte eingeschlossenen Fünfecks



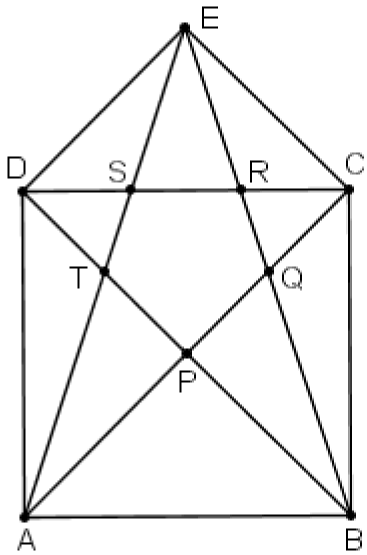
Lösung:

Das Verhältnis der Flächeninhalte der gefärbten Sternfigur und des in der Mitte eingeschlossenen Fünfecks beträgt 5 : 2.

Bezeichnungen:

Wir benennen
- die Länge der Kanten des gegebenen Quadrats ABCD mit a,
- den Schnittpunkt der Diagonalen [AC] und [BD] mit P,
- die Schnittpunkte der Gerade BE mit CA bzw. CD mit Q bzw. R,
- die Schnittpunkte der Gerade AC mit DC bzw. DB mit S bzw. T.

1. Beweismöglichkeit:



Da ABCD ein Quadrat ist, gilt:

$\sphericalangle CPD = 90^{\circ}$ und $\overline{PC} = \overline{PD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}$.

Da außerdem [DE] parallel zu [PC] und [CE] parallel zu [PD] sind, ist Viereck PCED ein Quadrat.

Nach dem Strahlensatz (Zentrum S) gilt:

$\overline{SD} : \overline{SC} = \overline{DE} : \overline{AC} = \overline{DE} : (2 \cdot \overline{PC}) = \overline{DE} : (2 \cdot \overline{DE}) = 1 : 2$ (1)

Analog gilt: $\overline{RC} : \overline{RD} = 1 : 2$ (2)

Aus (1) und (2) folgt: R und S dritteln die Strecke [CD],

d. h. $\overline{DS} = \overline{SR} = \overline{RC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{3} \cdot a$ (3)

Da das Dreieck CED gleichschenklig und rechtwinklig ist, gilt für die Höhe h_E von E auf CD: $h_E = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot a$ (4)

Nach (3) und (4) gilt für den Inhalt A_1 des Dreiecks RSE:

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \overline{RS} \cdot h_E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{12} \cdot a^2$ (5)

Nach dem Strahlensatz (Zentrum T) gilt:

(Höhe h_T von T auf DS) : (Höhe h'_T von T auf AB) = $\overline{DS} : \overline{AB} = \frac{1}{3} \cdot a : a = 1 : 3$

Mit $h_T + h'_T = a$ folgt daraus: $h_T = \frac{1}{4} \cdot a$ und $h'_T = \frac{3}{4} \cdot a$ (6)

Nach (3) und (6) gilt für die Inhalte A_2 der symmetrischen Dreiecke SDT und CRQ:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{DS} \cdot h_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{4} \cdot a = \frac{1}{24} \cdot a^2 \qquad (7)$$

Da die Höhe h_P von P auf AB $\frac{1}{2} \cdot a$ ist, gilt mit (6) für die Inhalte A_3 der symmetrischen Dreiecke PTA und PBQ:

$$A_3 = A_{\Delta ABT} - A_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h'_T - \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{3}{4} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{8} \cdot a^2 \qquad (8)$$

Nach (5), (7) und (8) ist der Inhalt der gefärbten Sternfigur

$$A_{Stern} = A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 = \frac{1}{12} \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{1}{24} \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot a^2 = \frac{5}{12} \cdot a^2 \qquad (9)$$

Für den Inhalt $A_{Fünfeck}$ der eingeschlossenen Fünfecksfläche gilt:

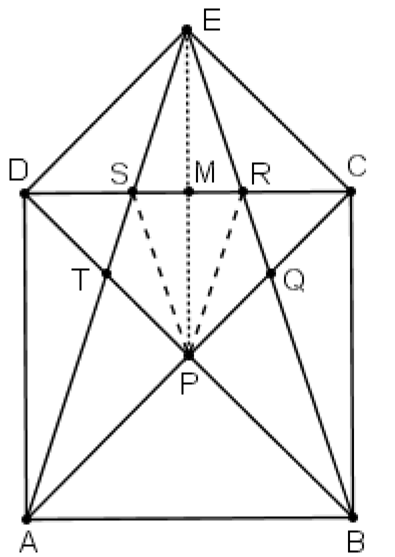
$$A_{Fünfeck} = A_{\Delta CSA} - A_{\Delta CRQ} - A_{\Delta PTA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CS} \cdot \overline{AD} - A_2 - A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \cdot a - \frac{1}{24} \cdot a^2 - \frac{1}{8} \cdot a^2 = \frac{1}{6} \cdot a^2$$

Damit gilt: $A_{Stern} : A_{Fünfeck} = \left(\frac{5}{12} \cdot a^2 \right) : \left(\frac{1}{6} \cdot a^2 \right) = 5 : 2$

2. Beweismöglichkeit:

Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecks PQR mit Φ.

Wir zeigen: $A_{Stern} = 10 \cdot \Phi$ und $A_{Fünfeck} = 4 \cdot \Phi$
Daraus folgt: $A_{Stern} : A_{Fünfeck} = (10 \cdot \Phi) : (4 \cdot \Phi) = 5 : 2$



Da ABCD ein Quadrat ist, gilt:
- Der Diagonalenschnittpunkt P ist Mittelpunkt der Diagonalen [AC] und [BD], d.h. $\overline{PC} = \overline{PD}$.
- Die Diagonalen schneiden sich senkrecht.

Da nach Vorgabe DE parallel zu AC und CE parallel zu BD sind, ist Viereck PCED ebenfalls ein Quadrat. Für seinen Diagonalenschnittpunkt M gilt demnach:

- $\overline{ME} = \overline{MP} = \overline{MC} = \overline{MD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$ (1)
- $ME \perp MC$

Die gesamte Figur ist demnach zu PE achsensymmetrisch.

Da außerdem $CM \perp CB$ ist, sind PE und BC parallel.
Mit (1) ($\overline{PE} = \overline{BC}$) folgt daraus, dass das Viereck BCEP ein Parallelogramm ist.
Sein Diagonalenschnittpunkt Q ist Symmetriezentrum, d.h. $\overline{QP} = \overline{QC}$, $\overline{QB} = \overline{QE}$ (2)

In Dreieck EPC sind nach (1) und (2) die Strecke [EQ] und [CM] Seitenhalbierende. Ihr Schnittpunkt R ist demnach der Schwerpunkt von Dreieck EPC, der bekanntlich die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1 teilt: D.h. $\overline{RE} = 2 \cdot \overline{QR}$ (3)

Aus (2) und (3) folgt: $\overline{BQ} = \overline{QE} = \overline{QR} + \overline{RE} = 3 \cdot \overline{QR}$ (4)

Da sich der Flächeninhalt eines Dreiecks durch $A_\Delta = 0{,}5 \cdot g \cdot h$ berechnen lässt, stehen die Inhalte zweier Dreiecke mit gleicher Höhe h im gleichen Verhältnis wie ihre Grundlinien g.

Außerdem haben zwei Dreiecke, bei denen je zwei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen und die den gleichen dritten Punkt haben, immer die gleiche Höhe.

Damit gilt:

$A_{\Delta QCR} = A_{\Delta PQR} = \Phi$, da $Q \in [PC]$ und $\overline{QP} = \overline{QC}$ nach (2)

$A_{\Delta QPB} = 3 \cdot A_{\Delta RPQ} = 3 \cdot \Phi$, da $Q \in [BR]$ und $\overline{BQ} = 3 \cdot \overline{QR}$ nach (4)

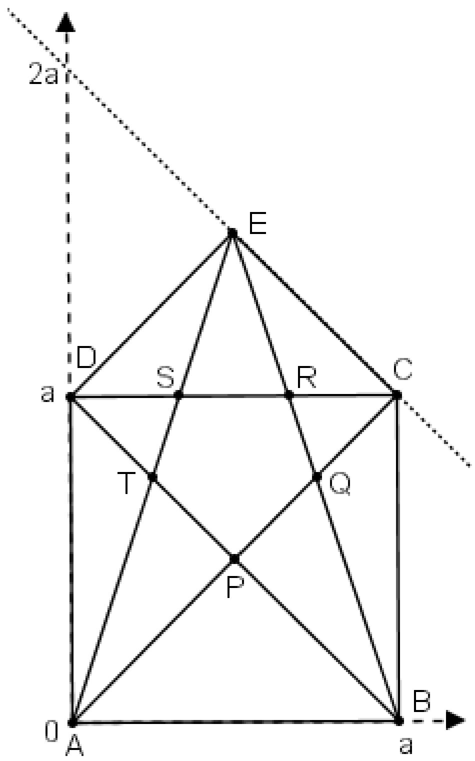
$A_{\Delta REP} = 2 \cdot A_{\Delta QRP} = 2 \cdot \Phi$, da $R \in [QE]$ und $\overline{RE} = 2 \cdot \overline{QR}$ nach (3)

$A_{\Delta MPR} = A_{\Delta MRE} = \Phi$, da $M \in [PE]$ und $\overline{ME} = \overline{MP}$ nach (1)
und $A_{\Delta MPR} + A_{\Delta MRE} = A_{\Delta REP} = 2 \cdot \Phi$

Da PE Symmetrieachse der gesamten Figur ist, gilt:

$A_{Stern} = 2 \cdot (A_{\Delta QPB} + A_{\Delta QCR} + A_{\Delta MRE}) = 2 \cdot (3 \cdot \Phi + \Phi + \Phi) = 10 \cdot \Phi$ und
$A_{Fünfeck} = 2 \cdot (A_{\Delta PQR} + A_{\Delta MPR}) = 2 \cdot (\Phi + \Phi) = 4 \cdot \Phi$

3. Beweismöglichkeit:



Legt man das Quadrat ABCD so in ein kartesisches Koordinatensystem, dass der Punkt A im Ursprung und der Punkt B auf der x-Achse liegt, so haben die Punkte A, B, C und die Koordinaten:
$A(0 \mid 0)$, $B(a \mid 0)$, $C(a \mid a)$ und $D(0 \mid a)$.

Die Geraden AC und BD haben die Gleichungen
AC: $y = x$ und BD: $y = -x+a$.

Die Geraden DE bzw. CE sind zu AC bzw. BD parallel, zu diesen jeweils um a nach oben verschoben. Sie haben demnach die Gleichungen
DE: $y = x+a$ und CE: $y = -x+2a$.

Für den Schnittpunkt E gilt: $x+a = -x+2a \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}a$

Also: $E(\frac{1}{2}a \mid \frac{3}{2}a)$

Die Gerade AE hat also die Steigung $(\frac{3}{2}a):(\frac{1}{2}a) = 3$ und die Gleichung AE: $y = 3x$.

Für den Schnittpunkt S von DC und AE gilt: $a = 3x \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}a$, also $S(\frac{1}{3}a \mid a)$.

Für den Schnittpunkt R von DC und BE gilt aus Symmetriegründen: $R(\frac{2}{3}a \mid a)$.

Für den Schnittpunkt T von BD und AE gilt: $-x+a = 3x \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}a$, also $T(\frac{1}{4}a \mid \frac{3}{4}a)$.

Damit erhält man:

Dreieck/e	Grundlinie	Zugehörige Höhe	Flächeninhalt
RES	$\overline{RS} = \frac{1}{3}a$	$h_E = \frac{3}{2}a - a = \frac{1}{2}a$	$A_1 = \frac{1}{12}a^2$
SDT/CRQ	$\overline{SD} = \overline{CR} = \frac{1}{3}a$	$h_T = a - \frac{3}{4}a = \frac{1}{4}a$	$A_2 = \frac{1}{24}a^2$
ABT/ABQ	$\overline{AB} = a$	$h'_T = \frac{3}{4}a$	$A_{3.1} = \frac{3}{8}a^2$
ABP	$\overline{AB} = a$	$h_P = \frac{1}{2}a$	$A_{3.2} = \frac{1}{4}a^2$
PTA/QPT			$A_3 = A_{3.1} - A_{3.2} = \frac{1}{8}a^2$

$$A_{Stern} = A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 = \frac{1}{12} \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{1}{24} \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot a^2 = \frac{5}{12} \cdot a^2$$

Für den Inhalt $A_{Fünfeck}$ der eingeschlossenen Fünfecksfläche gilt:

$$A_{Fünfeck} = A_{\Delta CSA} - A_{\Delta CRQ} - A_{\Delta PTA} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CS} \cdot \overline{AD} - A_2 - A_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a \cdot a - \frac{1}{24} \cdot a^2 - \frac{1}{8} \cdot a^2 = \frac{1}{6} \cdot a^2$$

Damit gilt: $A_{Stern} : A_{Fünfeck} = \left(\frac{5}{12} \cdot a^2\right) : \left(\frac{1}{6} \cdot a^2\right) = 5 : 2$

Aufgabe 3

Für die natürlichen Zahlen a, b und c soll es außer 1 keine natürlichen Zahlen geben, die Teiler von jeder der drei Zahlen ist.
Zeige: Wenn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ *gilt, dann ist a+b eine Quadratzahl.*

Beweisvorschlag:

Der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen x und y wird mit ggT(x;y) bezeichnet.

Die Umformung der Ausgangsgleichung ergibt:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{b+a}{a\cdot b}=\frac{1}{c} \Leftrightarrow a+b=\frac{a\cdot b}{c} \qquad (1)$$

Ist ggT(a;b) = t, so existieren natürliche Zahlen a_1 und b_1 mit

$a = a_1 \cdot t$ und $b = b_1 \cdot t$ (2)
und $ggT(a_1;b_1) = 1$. (3)

Da nach Voraussetzung ggT(a;b;c) = 1 ist, folgt ggT(t;c) = 1.

Da nach (1) $\frac{a\cdot b}{c}=\frac{a_1\cdot t\cdot b_1\cdot t}{c}$ eine natürliche Zahl ist und ggT(t;c) = 1 ist, folgt:
Es gibt nat. Zahlen a_2, b_2, c_1 und c_2 mit $a_1 = a_2 \cdot c_1$ und $b_1 = b_2 \cdot c_2$ und $c = c_1 \cdot c_2$. (4)

(4) in (3) eingesetzt, ergibt: $ggT(a_1;b_1) = ggT(a_2 \cdot c_1;b_2 \cdot c_2) = 1$

Daraus folgt: $ggT(a_2;c_2) = 1$ (5) und $ggT(b_2;c_1) = 1$ (6)

Setzt man (2) und (4) in (1) ein, so erhält man:

$$a+b=\frac{a\cdot b}{c} \Leftrightarrow a_2\cdot c_1\cdot t+b_2\cdot c_2\cdot t=\frac{a_2\cdot c_1\cdot t\cdot b_2\cdot c_2\cdot t}{c_1\cdot c_2}=a_2\cdot b_2\cdot t^2 \qquad (7)$$

- Teilt man die Gleichung (7) durch $b_2 \cdot t$, so erhält man: $\frac{a_2\cdot c_1}{b_2}+c_2=a_2\cdot t$.

  Demnach muss $\frac{a_2\cdot c_1}{b_2}$ eine natürliche Zahl sein.
  Da nach (6) $ggT(b_2;c_1) = 1$ ist, muss b_2 ein Teiler von a_2 sein. (8).

- Teilt man die Gleichung (7) durch $a_2 \cdot t$, so erhält man: $c_1+\frac{b_2\cdot c_2}{a_2}=b_2\cdot t$.

  Demnach muss $\frac{b_2\cdot c_2}{a_2}$ eine natürliche Zahl sein.
  Da nach (5) $ggT(a_2;c_2) = 1$ ist, muss a_2 ein Teiler von b_2 sein. (9)

Aus (8) und (9) folgt: $a_2 = b_2$ (10)

Setzt man (10) in (7) ein, so erhält man: $a+b=a_2\cdot a_2\cdot t^2=(a_2\cdot t)^2$.
D. h: a + b ist eine Quadratzahl.

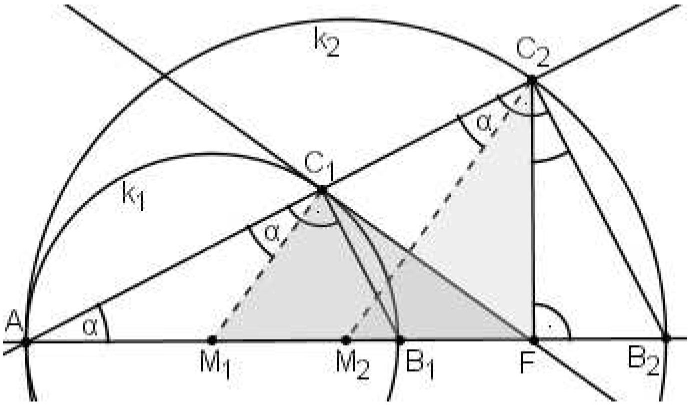
Aufgabe 4

Zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 ($r_1<r_2<2\cdot r_1$) berühren sich innen in einem Punkt A.
Die Gerade M_1M_2 schneidet k_1 und k_2 außer in A noch in B_1 bzw. B_2.
Eine weitere Gerade durch A scheidet k_1 und k_2 noch in C_1 bzw. C_1.
Die Senkrechte zu M_1M_2 durch C_2 schneidet M_1M_2 in F.

Zeige: FC_1 ist genau dann Tangente an k_1, wenn F Mittelpunkt von $[B_1B_2]$ ist.

Beweisvorschlag 1:

Die Bedingung $r_1<r_2<2\cdot r_1$ legt fest, dass die Punkte A, M_1, M_2, B_1, F und B_2 in dieser Reihenfolge auf der Geraden AB_2 liegen. Damit ist bei der Berechnung von Streckenlängen keine Fallunterscheidung notwendig.



Aufgrund der Vorgaben gilt mit $\sphericalangle M_1AC_1 = \alpha$:

Aus $\overline{M_1A} = \overline{M_1C_1}$ folgt:

$\sphericalangle AC_1M_1 = \sphericalangle M_1AC_1 = \alpha$ (1)

Aus $\overline{M_2A} = \overline{M_2C_2}$ folgt:

$\sphericalangle AC_2M_2 = \sphericalangle M_1AC_2 = \alpha$ (2)

Aus (1) und (2) folgt:

$\sphericalangle C_1M_1A = \sphericalangle C_2M_2A = 180^o - 2\cdot\alpha$

Also: $\sphericalangle FM_1C_1 = \sphericalangle FM_2C_2 = 2\cdot\alpha$ (3)

Da C_1 auf dem Thaleskreis k_1 über $[AB_1]$ und C_2 auf dem Thaleskreis k_2 über $[AB_2]$ liegt, gilt: $\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle AC_2B_2 = 90^o$ (4)

Unter der Voraussetzung, dass FC_1 Tangente an k_1, d.h. $\sphericalangle M_1C_1F = 90^o$ ist, gilt demnach:

$\sphericalangle B_1C_1F = \sphericalangle M_1C_1F - \sphericalangle M_1C_1B_1 = 90^o – (90^o - \alpha) = \alpha$

$\Rightarrow$ $\sphericalangle AC_2F = 90^o - \alpha$ (Winkelsumme in Dreieck AFC_2)

$\Rightarrow$ $\sphericalangle FC_1C_2 = 180^o – 90^o - \alpha = 90^o - \alpha$

Damit ist gezeigt, dass ΔM_2FC_2 gleichschenklig ist; daraus folgt: $\overline{FC_1} = \overline{FC_2}$ (*)

Da $\sphericalangle M_1C_1F = \sphericalangle C_2FM_2 = 90^o$ und (3) allgemein gilt, ist nach dem wsw-Kongruenzsatz:

$\Delta M_1C_1F \cong \Delta M_2FC_2$.

$\Rightarrow$ $\overline{M_1F} = \overline{M_2C_2} = r_2$

$\Rightarrow$ $\overline{B_1F} = r_2 - r_1 = (2\cdot r_2 - 2\cdot r_1):2 = (\overline{AB_2} - \overline{AB_1}):2$

$\Rightarrow$ F ist Mittelpunkt von $[B_1B_2]$.

Ist umgekehrt F der Mittelpunkt von $[B_1B_2]$, so ist

$\overline{B_1F} = (2\cdot r_2 - 2\cdot r_1):2 = r_2 - r_1 = (\overline{AB_2} - \overline{AB_1}):2$

Dann ist $\overline{M_1F} = r_1 + r_2 - r_1 = r_2 = \overline{M_2C_2}$ und $\overline{M_2F} = r_2 - (r_2 - r_1) = r_1 = \overline{M_1C_1}$.

Mit (3) folgt aus dem sws-Kongruenzsatz: $\Delta M_1C_1F \cong \Delta M_2FC_2$.

Also ist $\sphericalangle M_1C_1F = \sphericalangle C_2FM_2 = 90^o$ und damit ist FC_1 Tangente an k_1.

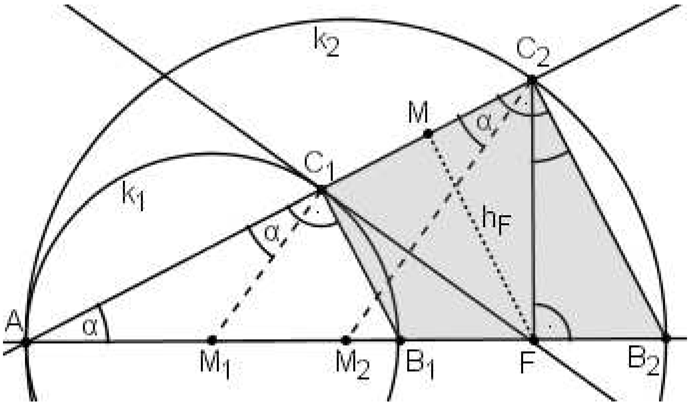
Variante: Nach (*) kann man auch folgendermaßen argumentieren:

$\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle AC_2B_2 = 90^o$,
d.h. $\square B_1B_2C_2C_1$ ist ein Trapez mit B_1C_1 parallel zu B_2C_2, in dem gilt:
$\overline{FC_1} = \overline{FC_2}$

$\Leftrightarrow$ Die Höhe h_F von F auf $[C_1C_2]$ teilt $[C_1C_2]$ in dessen Mitte M und ist parallel zu $[B_1C_1]$ und $[B_2C_2]$.

$\Leftrightarrow$ h_F ist Mittelparallel in dem Trapez $B_1B_2C_2C_1$.

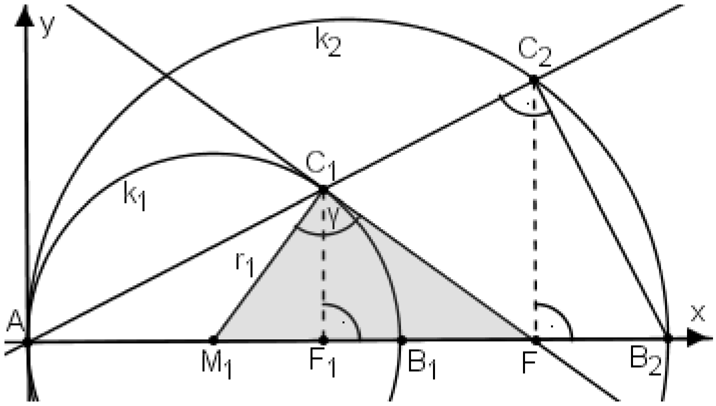
$\Leftrightarrow$ F ist Mittelpunkt von $[B_1B_2]$.



Beweisvorschlag 2:

Mit F_1 bezeichnen wir den Fußpunkt der Höhe von C_1 auf AB_1.

Die zentrische Streckung mit Zentrum A und Streckungsfaktor $\frac{r_1}{r_2}$ bildet k_2 auf k_1, C_2 auf C_1 und F auf F_1 ab.



Legt man über die Figur ein Koordinatensystem, so dass A der Ursprung ist und B_2 auf der x-Achse liegt, so gilt:

Ist x die x-Koordinate von C_2 und F, so ist $\frac{r_1}{r_2} \cdot x$ die x-Koordinate von C_1 und F_1 und

$(2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2) : 2 = r_1 + r_2$ die x-Koordinaten des Mittelpunkts von $[B_1B_2]$.

Die Gerade C_1F ist genau dann Tangente an k_1, wenn $\sphericalangle M_1C_1F = 90^o$;2 das Dreieck M_1FC_1 also rechtwinklig ist.

Variante 1:

Genau dann gilt nach dem Kathetensatz: $\overline{M_1C_1}^2 = \overline{M_1F_1} \cdot \overline{M_1F}$

Da $\overline{M_1C_1} = r_1$, $\overline{M_1F_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot x - r_1$ und $\overline{M_1F} = x - r_1$ sind, bedeutet dies:

$$r_1^2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \cdot x - r_1\right) \cdot (x - r_1) = \frac{r_1}{r_2} \cdot x^2 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot x - r_1 \cdot x + r_1^2 .$$

Subtrahiert man zunächst auf beiden Seiten der Gleichung r_1^2 und multipliziert dann $\frac{x \cdot r_2}{r_1}$, so erhält man: $0 = x - r_1 - r_2$, also $x = r_1 + r_2$.

Dies bedeutet, dass F der Mittelpunkt der Strecke $[B_1B_2]$.

Variante 2:

Genau dann gilt der Höhensatz: $\overline{C_1F_1}^2 = \overline{M_1F_1} \cdot \overline{F_1F}$

Da $\overline{M_1F_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot x - r_1$ und $\overline{F_1F} = x - \frac{r_1}{r_2} \cdot x$ und $\overline{C_1F_1}^2 = r_1^2 - \overline{M_1F_1}^2$ (nach dem Satz von Pythagoras in Dreieck $M_1F_1C_1$) gilt, bedeutet dies:

$$r_1^2 - \left(\frac{r_1}{r_2} \cdot x - r_1\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2} \cdot x - r_1\right) \cdot \left(x - \frac{r_1}{r_2} \cdot x\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad r_1^2 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{r_1^2}{r_2} \cdot x - r_1^2 = \frac{r_1}{r_2} \cdot x^2 - \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot x^2 - r_1 \cdot x + \frac{r_1^2}{r_2} \cdot x$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{r_1^2}{r_2} \cdot x = \frac{r_1}{r_2} \cdot x^2 - r_1 \cdot x \quad \left| \cdot \frac{r_2}{r_1 \cdot x} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad r_1 = x - r_2 \;\Leftrightarrow\; x = r_1 + r_2 \;\Leftrightarrow$$ F ist Mittelpunkt der Strecke $[B_1B_2]$.

Variante 3:

Genau dann ist das Produkt der Steigungen der Geraden M_1C_1 und FC_1 gleich -1.

Da die Geraden M_1C_1 und FC_1die Steigungen $\frac{\overline{F_1C_1}}{\overline{M_1F_1}}$ und $-\frac{\overline{F_1C_1}}{\overline{F_1F}}$ haben, bedeutet

dies: $\frac{\overline{F_1C_1}}{\overline{M_1F_1}} \cdot \left(-\frac{\overline{F_1C_1}}{\overline{F_1F}}\right) = -1 \quad \left| \cdot \overline{M_1F_1} \cdot \left(-\overline{F_1F}\right) \right.$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\overline{F_1C_1}\right)^2 = \overline{M_1F_1} \cdot \overline{F_1F}$$ (Höhensatz)

Nach Variante 1 bedeutet dies, dass F der Mittelpunkt von $[B_1B_2]$ ist.