Landeswettbewerb Mathematik

Bayern

Lösungsbeispiele 1. Runde 2006

Aufgabe 1

Die Ziffern von 1 bis 5 sollen so in einer Reihe angeordnet werden, dass jedes Paar benachbarter Ziffern eine Zahl ergibt, die ein Produkt zweier einstelliger Zahlen ist.

Bestimme alle möglichen Anordnungen.

Zum Beispiel ist 43251 keine mögliche Anordnung. Es gilt zwar 32 = 4·8 und 25 = 5·5, aber 43 und 51 lassen sich nicht als Produkt von zwei einstelligen Zahlen schreiben.

Ergebnis: Die einzigen möglichen Anordnungen sind 3 2 1 5 4, 3 2 1 4 5 und 3 5 4 2 1.

Lösungsvorschlag:

~~11 = 1·11~~	12 = 2·6	~~13 = 1·13~~	14 = 2·7	15 = 3·5
21 = 3·7	~~22 = 2·11~~	~~23 = 1·23~~	24 = 4·6	25 = 5·5
~~31 = 1·31~~	32 = 4·8	~~33 = 3·11~~	~~34 = 2·17~~	35 = 5·7
~~41 = 1·41~~	42 = 6·7	~~43 = 1·43~~	~~44 = 4·11~~	45 = 5·9
~~51 = 3·17~~	~~52 = 4·13~~	~~53 = 1·53~~	54 = 6·9	~~55 = 5·11~~

Die neben stehende Tabelle gibt einen Überblick über die zweistelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 bilden lassen. Die Zahlen, die sich nicht als Produkt von zwei einstelligen Zahlen schreiben lassen, sind durchgestrichen.

In der mittleren Spalte der Tabelle - das sind alle Zahlen mit Endziffer 3 - sind alle Zahlen durchgestrichen. Daran erkennt man, dass keine der möglichen Zahlen die Einerziffer 3 haben kann. Einzige Stelle in der Anordnung der fünf Ziffern, die nie Einerziffer ist, ist die erste Stelle. Folglich muss die Anordnung mit 3 beginnen.

In der mittleren Zeile - das sind alle Zahlen mit Anfangsziffer 3 - sind nur die Zahlen 32 und 35 nicht durchgestrichen. Damit ist eine Anordnung der fünf Ziffern höchstens dann möglich, wenn sie mit 32 oder mit 35 beginnt.

Zuerst untersuchen wir mögliche Anordnungen, die mit 35 beginnen: In der unteren Zeile - das sind alle Zahlen mit Anfangsziffer 5 - ist nur die 54 nicht durchgestrichen. Eine Anordnung, die mit 35 beginnt, kann also nur mit 4 weiter gehen, Zeile 4 ergibt dann, dass die nächste Ziffer 2 sein muss (die Ziffer 5 ist schon vergeben) - und die Zeile 2 ergibt, dass die 1, also die einzige noch nicht vergebene Ziffer, eine zulässige Ziffer nach der 2 ist. Damit ist 3 5 4 2 1 eine mögliche Anordnung und auch die einzige, die mit 35 beginnt.

Nun untersuchen wir Anordnungen, die mit 32 beginnen: Da noch 3 Stellen mit 3 Zahlen zu besetzen sind, gibt es 3 · 2 · 1 = 6 solche Anordnungen. Die schreiben wir alle systematisch auf und untersuchen, ob die dabei entstehenden zweistelligen Zahlen in der Tabelle durchgestrichen sind:

3 2 1 4 5	3 2 ~~4 1~~ 5	3 2 ~~5 1~~ 4
3 2 1 5 4	3 2 4 ~~5 1~~	3 2 5 ~~4 1~~

Es gibt also außer der oben gefundenen Anordnung 3 5 4 2 1 nur noch 3 2 1 5 4 und 3 2 1 4 5. Das war zu zeigen.

Aufgabe 2

Xaver addiert die Größen der Innenwinkel eines ebenen Vielecks und erhält den Wert 2006°. Er hat dabei einen Winkel übersehen.

Wie groß kann dieser Winkel sein?

Antwort:

Der übersehene Winkel ist entweder 154° oder 334° groß.

Lösungsvorschlag:

Der gesuchte Winkel sei α, die Anzahl der Ecken in dem Vieleck sei n.

Die Winkelsumme in einem ebenen Vieleck mit n Ecken beträgt $(n-2)\cdot 180^{\circ}$. Damit muss gelten:

$$(n-2)\cdot 180^{\circ} = \alpha + 2006^{\circ}$$

also $$\alpha = (n-2)\cdot 180^{\circ} - 2006^{\circ}$$

Wir berechnen aus dieser Formel die Werte von α für n = 13, 14, 15 und 16 aus und schreiben sie in eine Tabelle:

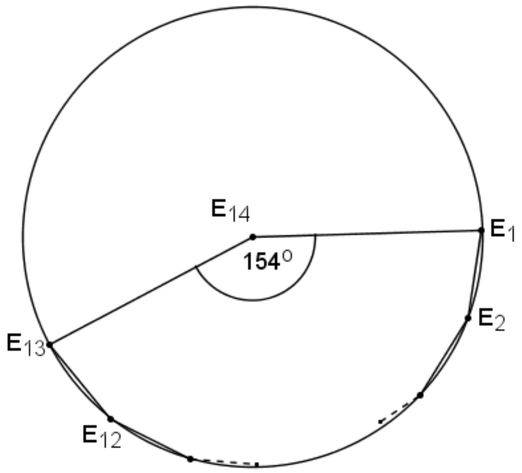
n	13	14	15	16
α	-26°	154°	334°	514°

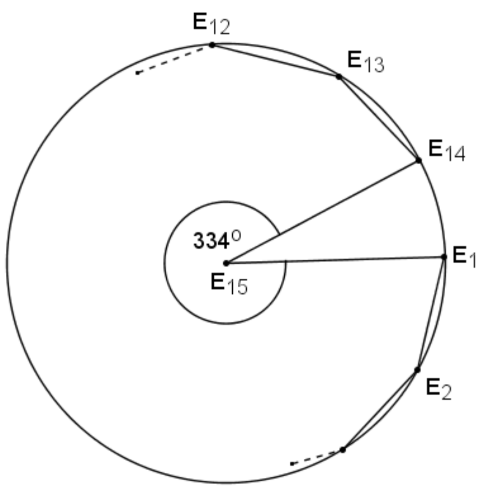
Wenn n größer wird, wird α auch größer, wenn n kleiner wird, wird α auch kleiner. Da zusätzlich für α gelten muss

$$0^{\circ} < \alpha < 180^{\circ} \text{ oder } 180^{\circ} < \alpha < 360^{\circ},$$

sind 154° und 334° die einzigen möglichen Werte.

Es gibt auch tatsächlich Vielecke mit dieser Winkelkonstellation: Wir legen die Ecke E_n (n = 14 oder n = 15) auf den Mittelpunkt eines Kreises und zeichnen dort einen Winkel mit den oben berechneten Maßen. Diese schneiden die Kreislinie in zwei Punkten, die wir mit E_1 bzw. E_{n-1} benennen. Den so begrenzten Kreisbogen teilen wir in n-2 gleiche Teile auf, die Teilpunkte sind dann die Ecken E_2, ..., E_{n-1}.





Aufgabe 3

Für welche natürlichen Zahlen n gibt es genau zwei verschiedene Primzahlen, die $n^3 - n$ teilen?

Antwort:

Nur für $n = 2$ und $n = 3$ gibt es genau zwei verschiedene Primzahlen, die $n^3 - n$ teilen.

Lösungsvorschlag:

Es ist $n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ für alle Zahlen n, also das Produkt von drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen.
Unter drei aufeinander folgenden ganzen Zahlen, ist stets mindestens eine durch 2 und genau eine durch 3 teilbar, d.h. die beiden verschiedenen Primzahlen 2 und 3 sind stets Teiler von $n^3 - n$. Damit muss - wenn n die Bedingungen der Aufgabe erfüllen soll - die Primfaktorzerlegung von $n^3 - n$ stets die Faktoren 2 und 3 enthalten, aber keine weiteren.

1. Fall: $n = 0$ oder $n = 1$: Dann ist $n^3 - n = 0$ und alle Primzahlen (das sind mehr als 2!) sind Teiler von $n^3 - n$; d.h. $n = 0$ und $n = 1$ sind nicht bei den gesuchten Zahlen.

2. Fall: $n = 2$: Dann ist $n^3 - n = 2^3 - 2 = 6 = 2 \cdot 3$; damit sind 2 und 3 die beiden einzigen Primzahlen, die Teiler von $n^3 - n$ sind. Also ist $n = 2$ eine der gesuchten Zahlen.

3. Fall: $n = 3$: Dann ist $n^3 - n = 3^3 - 3 = 24 = 2^3 \cdot 3$; damit sind 2 und 3 die beiden einzigen Primzahlen, die Teiler von $n^3 - n$ sind. Also ist $n = 3$ eine der gesuchten Zahlen.

4. Fall: $n > 3$ und n ist ungerade: Dann enthält die Primfaktorzerlegung von n nicht den Faktor 2, aber einen ungeraden. Wenn also n die Bedingungen der Aufgabe erfüllen soll, d.h. wenn die Primfaktorzerlegung von $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ und damit auch die Primfaktorzerlegung von n keine anderen Faktoren als 2 und 3 enthalten darf, dann muss n eine Potenz von 3 sein.
Da n ungerade und durch 3 teilbar ist, sind die zu n benachbarten Zahlen $n -1$ und $n + 1$ beide gerade und beide nicht durch 3 teilbar. Wenn die Primfaktorzerlegung von $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ und damit auch die Primfaktorzerlegungen von $n-1$ und $n+1$ höchstens die Faktoren 2 und 3 enthalten sollen, dann dürfen die Primfaktorzerlegungen von $n-1$ und $n+1$ also nur den Faktor 2 enthalten; die beiden Zahlen müssen also zwei Zweierpotenzen sein, die sich um 2 unterscheiden. Die einzigen Zweierpotenzen, die diese Bedingung erfüllen, sind 2 und 4, hieraus folgt aber sofort $n = 3$; dies steht aber im Widerspruch zur Fallbeschreibung. Es gibt also keine Lösung für n, die zu dieser Fallbeschreibung passt.

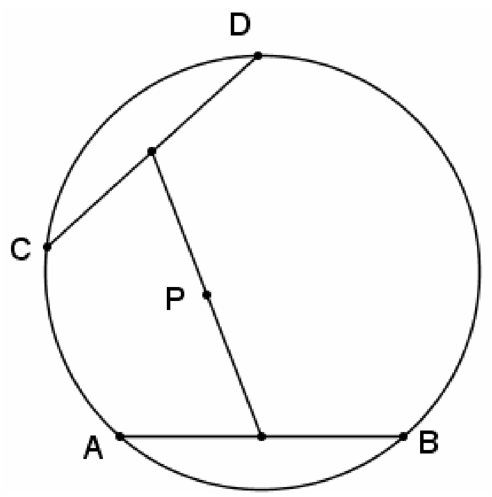
5. Fall: $n > 3$ und n ist gerade: Dann sind $n - 1$ und $n + 1$ beide ungerade und beide größer als 2; die Primfaktorzerlegungen beider Zahlen enthalten also eine ungerade Primzahl und nicht die 2. Wenn n die Bedingungen der Aufgabe erfüllen soll, d.h. wenn die Primfaktorzerlegung von $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ und damit auch die Primfaktorzerlegungen von $n - 1$ und $n + 1$ keine anderen Faktoren als 2 und 3 enthalten dürfen, dann dürfen beide Zahlen nur den Faktor 3 enthalten. Beide Zahlen sollen aber auch eine Differenz von 2 haben, was einen Widerspruch darstellt.
Es gibt also keine Lösung für n, die zu dieser Fallbeschreibung passt.

Da mit den 5 Fällen alle möglichen Zahlen n untersucht sind, ist der Beweis abgeschlossen.

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Kreis mit zwei gleich langen Sehnen [AB] und [CD]. P ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Sehnenmittelpunkte. Die Sehne [CD] gleitet am Kreis, die Sehne [AB] bleibt fest.

Welche Bahn beschreibt dabei P?



Vorbemerkung:

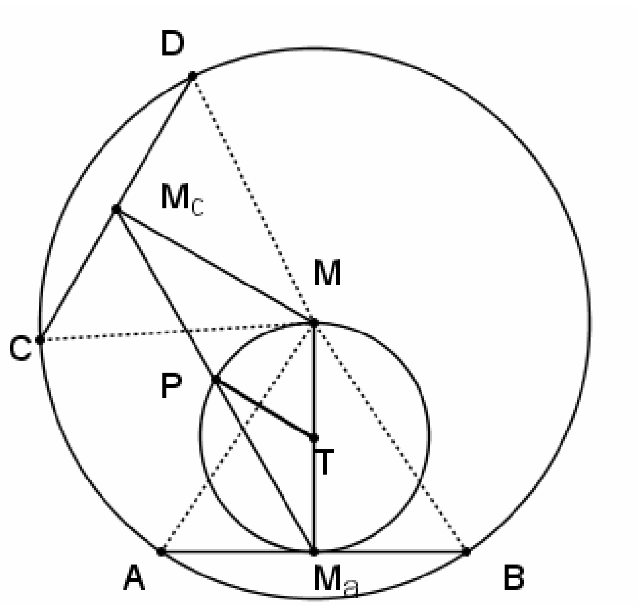
Wir bezeichnen den Mittelpunkt des gegebenen Kreises mit M, die Mittelpunkte vom [AB] und [CD] mit M_a bzw M_c, sowie den Mittelpunkt vom [MM_a] mit T.

Antwort:

Der Punkt P beschreibt den Thaleskreis über der Strecke [MM_a].

1. Lösungsvorschlag:

Die Dreiecke ABM und CDM sind kongruent, denn sie stimmen in drei Seiten überein.
Somit stimmen auch die Höhen überein und es gilt: $\overline{MM_a} = \overline{MM_c}$.



Außer in den unten behandelten Grenzfällen bilden die Punkte M, M_a und M_c ein Dreieck. In diesem Dreieck ist $[TP]$ Mittelparallele, denn T und P sind Mittelpunkte zweier Seiten. Somit gilt
$\overline{TP} = \frac{1}{2}\overline{MM_c} = \frac{1}{2}\overline{MM_a}$
P liegt also auf dem Thaleskreis über der Strecke $[MM_a]$.

Auch im Fall $M_a = M_c = P$ - dies ist genau dann der Fall, wenn die beiden Sehnen übereinstimmen – liegt P auf dem Thaleskreis.

In dem Fall, dass die Sehnen verschieden und parallel sind, ist M der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Sehnenmittelpunkte und somit ist P = M.
P liegt also ebenfalls auf dem Thaleskreis.

Es muss noch gezeigt werden, dass jeder Punkt P des Thaleskreises auch tatsächlich Mittelpunkt einer Verbindungsstrecke ist:
Dies sieht man wie folgt: Sei $P \neq M$ (der Fall P = M ist im vorletzten Absatz behandelt) ein Punkt des Thaleskreises über [M_aM]. Die Gerade PM ist Symmetrieachse des gegebenen Kreises; die Sehne [AB] wird also bei Spiegelung auf eine gleichlange Sehne [CD] abgebildet.
P ist als Achsenpunkt gleich weit von M_a und dem Bildpunkt M_c entfernt. Da PM senkrecht zu [M_aM_c] ist, ist P auch Mittelpunkt dieser Verbindungsstrecke.

2. Lösungsvorschlag:

Wenn die Sehne [DC] am Kreis gleitet, dann bleiben die Dreiecke CDM kongruent, insbesondere hat die Strecke [MM_C] immer die gleiche Länge; die Bahn des Punktes M_C ist also identisch mit der vollständigen Kreislinie des Kreises um M mit Radius $\overline{MM_C}$.
Da die Sehnen [AB] und [CD] gleichlang sind, kann M_C auch die Lage von M_A einnehmen und damit ist $\overline{MM_C} = \overline{MM_A}$.

In jeder Lage von M_C ist P das Bild von M_C bei der zentrischen Streckung $S(M_A; \frac{1}{2})$. Also ist die Bahn von P das Bild der Bahn von M_C bei dieser zentrischen Streckung.

Jede zentrische Streckung ist kreistreu; dabei wird der Mittelpunkt eines Kreises auf den Mittelpunkt des Bildkreises abgebildet.

Die zentrische Streckung $S(M_A; \frac{1}{2})$ bildet M auf den Mittelpunkt der Strecke [MM_A] ab.

Aus diesen fünf Argumenten folgt sofort: Die Bahn von P ist der vollständige Kreis um den Mittelpunkt der Strecke [MM_A] mit Radius $\frac{1}{2} \cdot \overline{MM_C} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MM_A}$, also der Thaleskreis über der Strecke [MM_A].

3. Lösungsvorschlag:

Sind am gleichen Kreis die Sehnen [AB] und [CD] gleich lang und die Winkel $\angle AMB$ und $\angle DMC$ gleich orientiert, so gibt es immer eine Symmetrieachse, bezüglich derer die beiden Sehnen symmetrisch liegen: Falls $A \neq C$, ist das Lot von M auf die Strecke [AC] diese Symmetrieachse, falls $A = C$, ist die Gerade AM diese Symmetrieachse.

Da eine Achsenspiegelung verhältnistreu ist, liegen auch die Mittelpunkte der beiden Strecken symmetrisch bzgl. dieser Achse. Damit steht ihre Verbindungsstrecke senkrecht auf dieser Achse und deren Mittelpunkt - also P - liegt auf dieser Achse.
Das heißt aber, dass - falls $P \neq M_A$ und $P \neq M$ - stets $\angle M_APM = 90°$. Da zusätzlich die Punkte M_A und M fest sind, liegt P also auf dem Thaleskreis über der Strecke [MM_A].
Falls $P = M_A$ oder $P = M$, ist P identisch mit Punkten des Thaleskreises, liegt als ebenfalls auf ihm.

Ist umgekehrt P ein Punkt auf dem Thaleskreis, so betrachten wir im Fall $P \neq M$ die Spiegelung an PM, im Fall $P = M$ die Spiegelung am Lot auf MM_A in M. In beiden Fällen liegen M und P auf der Spiegelachse; die Spiegelung bildet also den Kreis auf sich selbst ab, den Punkt P ebenso. Damit wird auch die Sehne [AB] auf eine Sehne gleicher Länge am gleichen Kreis abgebildet, ebenso ihr Mittelpunkt M_A auf den Mittelpunkt der abgebildeten Sehne. Diese Sehne beschreibt eine mögliche Lage von [CD] mit ihrem Mittelpunkt M_C beim Gleiten am Kreis. Zu zeigen ist noch, dass P stets der Mittelpunkt von [M_AM_C] ist:

> Falls $P = M_A$, ist [AB] mit [CD] identisch, insbesondere ist auch $P = M_A = M_C$, also P der Mittelpunkt von [M_AM_C].
>
> Falls $P \neq M_A$, steht PM_A senkrecht auf der betrachteten Symmetrieachse und P ist ein Punkt der Symmetrieachse. Nach Definition der Achsspiegelung liegt dann M_C auf PM_A und P ist der Mittelpunkt von M_AM_C.

Aufgabe 5

Zocker-Tom besucht ein Spielcasino. Er setzt bei jedem Spiel den gleichen Anteil des Geldes, das er im Moment hat. Gewinnt er, dann erhält er seinen Einsatz zurück und zusätzlich den gleichen Betrag nach einmal. Verliert er, so hat er seinen Einsatz verspielt.

Als Zocker-Tom wieder aus dem Spielcasino kommt, hat er gleich viele Spiele gewonnen wie verloren. Über die Reihenfolge von Gewinn und Verlust ist nichts bekannt.

Hat er insgesamt Gewinn oder Verlust gemacht?

Antwort:

Zocker-Tom hat Verlust gemacht.

Lösungsvorschlag:

Mit q bezeichnet man den (relativen) Anteil des Geldes, den Zocker-Tom von dem Geld, das er im Moment hat, einsetzt. Da er etwas einsetzt, aber auch nicht mehr einsetzen kann, als er momentan hat, gilt:$0 < q \leq 1$.

Bezeichnet man den Geldbetrag, den er vor einem Spiel besitzt, mit x, so ist sein Einsatz beim nächsten Spiel $q \cdot x$.

Gewinnt er dieses, so besitzt er vor dem kommenden Spiel den Betrag $x + q \cdot x = x \cdot (1+q)$; verliert er dieses, so besitzt er vor dem kommenden Spiel den Betrag $x - q \cdot x = x \cdot (1-q)$.

Daraus folgt:
Gewinnen bedeutet Multiplikation des momentanen Geldbetrages mit dem Faktor 1+q; verlieren bedeutet Multiplikation des momentanen Geldbetrages mit dem Faktor 1-q.

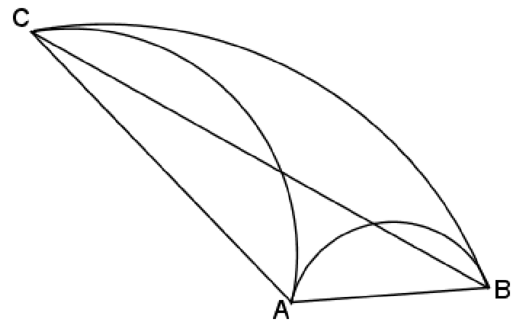
Ist K das Anfangskapital von Zocker-Tom vor dem ersten Spiel, so besitzt er nach n gewonnenen und n verlorenen Spielen das Endkapital $E = K \cdot p$, wobei p ein Produkt mit n Faktoren 1+q und n Faktoren 1-q ist.

Da nach dem Kommutativgesetz in einem Produkt die Reihenfolge der Faktoren beliebig geändert werden kann, ohne dass sich sein Wert ändert, gilt:
$p = (1+q)^n \cdot (1-q)^n = ((1+q) \cdot (1-q))^n = (1-q^2)^n$

Da $0 < q \leq 1$ gilt: ist $p = (1-q^2)^n < 1$

Folglich ist $E = K \cdot p < K$

Aufgabe 6

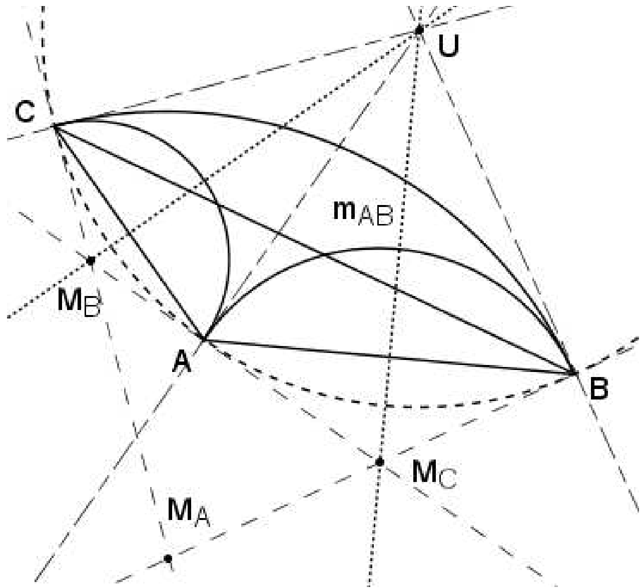


Drei Kreisbögen bilden ein Dreibogeneck ABC,wenn sie auf Kreisen liegen, die sich in den Punkten A, B bzw. C berühren.
Dabei sind nur Kreisbögen zugelassen, die in der Zeichenebene liegen und deren Mittelpunktswinkel kleiner als 180^o sind.

Gegeben sind nun die Eckpunkte A, B und C eines Dreiecks, das nicht rechtwinklig ist.

Konstruiere das zugehörige Dreibogeneck.

1. Lösungsvorschlag:



Wir bezeichnen mit
- U den Umkreismittelpunkt von Dreieck ABC,
- m_{AB}, m_{BC} und m_{CA} die Mittelsenkrechten der Strecken [AB], [BC] bzw. [CA],
- M_A, M_B und M_C die Mittelpunkte der gesuchten Kreisbögen durch B und C, A und C bzw. A und B.

Beschreibung der Konstruktion:

m_{AB} und m_{AC} schneiden sich in dem Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABC. Das Lot auf UA durch A und das Lot auf UB durch B schneiden sich in M_C.
Analog schneiden sich das Lot auf UA durch A und das Lot auf UC durch C in M_B; entsprechend das Lot auf UB durch B und das Lot auf UC durch C in M_A.

Die Konstruktion führt immer zu einem Ergebnis:

Der Umkreismittelpunkt U eines jeden Dreiecks ist eindeutig definiert; er fällt nie mit einer Ecke des Dreiecks zusammen. Damit sind auch die in der Konstruktion verwendeten Strecken, ebenso die Lote auf ihnen durch die Ecken des Dreiecks eindeutig definiert.
Da das Dreieck ABC nach Voraussetzung nicht rechtwinklig ist, liegt U auf keiner der Dreiecksseiten. Damit sind auch keine zwei der Geraden UA, UB und UC parallel und somit auch keine zwei der verwendeten Lote. Deren Schnittpunkte M_A, M_B und M_C sind also immer existent und eindeutig definiert.

Die Konstruktion erfüllt die Bedingungen der Aufgabe:

U liegt auf m_{AB}, also liegen UA und UB und damit auch die beiden verwendeten Lote achsensymmetrisch bzgl. m_{AB}. Der Schnittpunkt M_C der beiden Lote liegt also ebenfalls auf m_{AB}. Damit gehen alle Kreisbögen durch A mit Mittelpunkt M_C auch durch B. Entsprechend gehen alle Kreisbögen mit Mittelpunkt M_A (bzw. M_B), die durch B (bzw. C) gehen, auch durch C (bzw. A).
Nach Konstruktion ist $\angle UBM_C = \angle UBM_A = 90^o$; damit ist UB – wie verlangt – Tangente im Punkt B sowohl an den Kreis um M_C mit Radius $\overline{M_C B}$ als auch an den Kreis um M_A mit dem Radius $\overline{M_A B}$.
Entsprechend ist UC (bzw. UA) gemeinsame Tangente in C (bzw. A) an die Kreise um M_A und M_B (bzw. M_C und M_B).

2. Lösungsvorschlag

Wir bezeichnen ohne Beschränkung der Allgemeinheit das gegebene Dreieck ABC so, dass für die Seitenlängen gilt: $a \le b \le c$, d.h. $\alpha \le \beta \le \gamma$.
Daraus folgt:
$\alpha \le \beta \le 90^o$ und $\gamma < 90^o$, wenn ΔABC spitz ist, und $\gamma > 90^o$, wenn ΔABC stumpf ist.

Beschreibung der Konstruktion:

Wir errichten jeweils nach außen
- über [BC] ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis [BC] und Basiswinkel α,
- über [AC] ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis [AC] und Basiswinkel β.

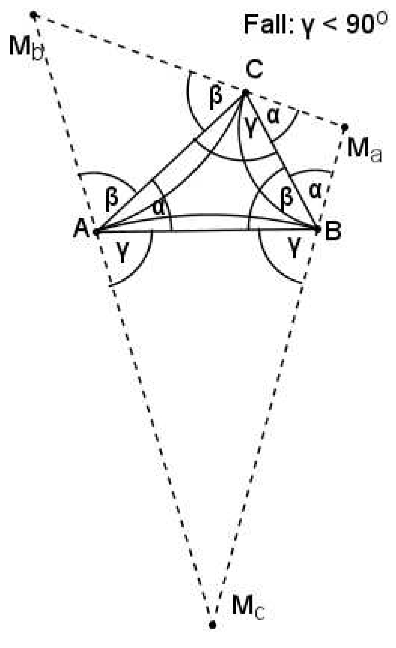
Ihre Spitzen sind die Mittelpunkte M_a und M_b der gesuchten Kreisbögen durch B und C, bzw. durch A und C.
Die Geraden AM_b und BM_a schneiden sich in dem Mittelpunkt M_c des dritten Kreisbogens durch A und B.

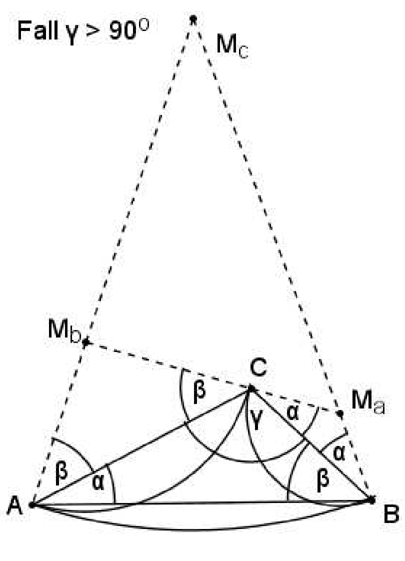
Begründung für die Richtigkeit und Durchführbarkeit der Konstruktion:

Für die konstruierten Kreisbögen um M_a und M_b gilt:
- Sie gehen durch B und C, bzw. durch A und C, da ΔBCM_a und ΔACM_b gleichschenklig sind,
- Sie berühren sich in C, da $\angle M_bCM_a = \beta + \gamma + \alpha = 180^o$ ist, d. h. $C \in M_aM_b$.
- Sie haben mit $180^o - 2\alpha$ und $180^o - 2\beta$ Mittelpunktswinkel kleiner als 180^o.

Die Geraden AM_b und BM_a schließen mit [AB] jeweils einen Winkel von $\alpha+\beta = 180 - \gamma \neq 90^o$ ein, d. h. sie schneiden sich (Schnittpunkt M_c).
Ist $\gamma < 90^o$, so liegt M_c zu M_a und M_b auf verschiedenen Seiten bzgl. AB.
Ist $\gamma > 90^o$, so liegt M_c zu M_a und M_b auf der gleichen Seite bzgl. AB.

Außerdem ist ΔABM_c gleichschenklig mit Basis [AB].
Der dritte konstruierte Kreisbogen geht damit durch A und C.
Da $A \in M_bM_c$, berühren sich die Kreisbögen um M_b und M_c in A,
da $B \in M_aM_c$, berühren sich die Kreisbögen um M_a und M_c in B.
Der Mittelpunktswinkel des Kreisbogens um M_c ist mit
$180^o - 2\gamma$ für $\gamma < 90^o$ und $2\gamma - 180^o$ für $\gamma > 90^o$ stets kleiner als 180^o.





Bemerkung:

Falls die Punkte A, B und C ein rechtwinkliges Dreieck bilden, entartet der Kreisbogen, der die Eckpunkte der Hypotenuse verbindet, zu einer geraden Strecke.