Landeswettbewerb Mathematik
Bayern
Lösungsbeispiele 1. Runde 2005

Aufgabe 1

Ein Stück Papier wird in 7 oder 10 Stücke zerschnitten. Nun wird eines der vorhandenen Stücke wieder wahlweise in 7 oder 10 Stücke zerschnitten; dieser Vorgang wird mehrmals wiederholt.

Kann man auf diese Weise 2006 Papierstücke erhalten?

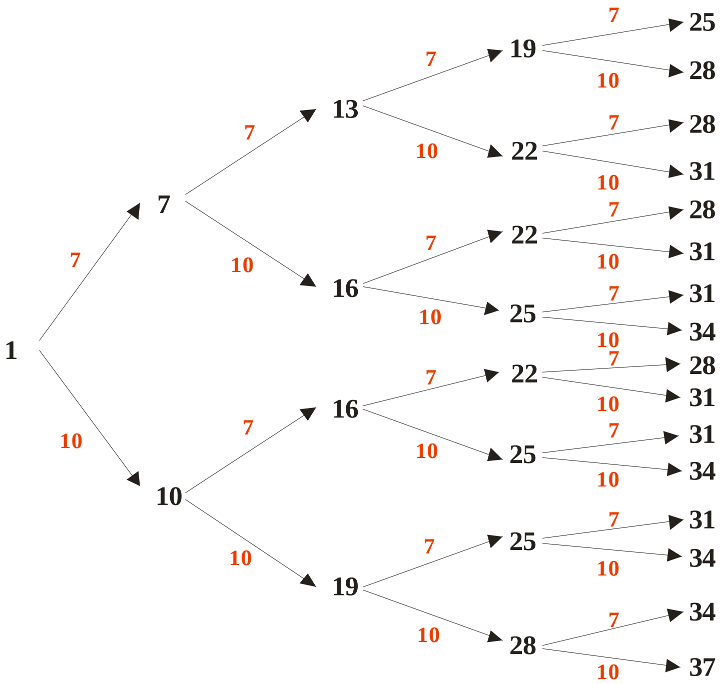
Beispiel:

Wenn man das erste Stück Papier in 7 Stücke zerschneidet, so hat man danach **7** Stücke Papier. Wenn man jetzt eins davon wieder in 7 Stücke zerschneidet, so hat man nach dem zweiten Schneiden insgesamt **13** Stücke: die sechs alten, die beim zweiten Schneiden nicht zerschnitten wurden, plus die 7 neuen, die aus dem einen Stück beim zweiten Schneiden entstanden sind. Schneidet man nun beim dritten Schneiden eins der 13 in 10 Stücke, so hat man nach dem dritten Schneiden 9 Stücke mehr, also insgesamt 22 Stücke. In dem Diagramm erkennt man, wie viele Stücke man z.B. nach jedem Schneiden haben kann. Über dem Pfeil steht jeweils, in wie viele Stücke eins der vorhandenen Stücke zerschnitten wird.

$$1 \xrightarrow{7} 7 \xrightarrow{7} 13 \xrightarrow{10} 22 \xrightarrow{7} 28 \xrightarrow{10} 37 \xrightarrow{10}$$

Übersicht:

Eine genauere Übersicht, wie viele Stücke nach den ersten Schnitten entstanden sind, erhält man, wenn man ein Baumdiagramm zeichnet. Man hat bei jedem Schnitt zwei Möglichkeiten.



Man erkennt, dass nicht alle Anzahlen von Papierstücken möglich sind. Wenn man sich die vorkommenden Anzahlen 1, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25,… anschaut, so fällt auf, dass ab der Zahl 7 aufeinander folgende Zahlen den Abstand 3 haben, genauer dass die Anzahlen beim Teilen durch 3 den Rest 1 lassen. Diese Beobachtung muss man aber allgemein beweisen.

Lösung:

Nein, auf diese Weise kann man niemals 2006 Papierstücke erhalten.

1. Beweisvorschlag:

Wenn ein Stück Papier in 7 Stücke zerschnitten wird, so erhöht sich die Anzahl der Papierstücke um 6, wenn eins in 10 Stücke zerschnitten wird, so erhöht sich die Anzahl um 9.
Da 6 und 9 beide durch 3 teilbar sind, erhöht sich die Anzahl der Papierstücke also bei jedem Schneiden um eine durch 3 teilbare Zahl. Auch nach zweimaligem Schneiden, dreimaligem Schneiden usw. hat sich die Anzahl insgesamt um eine durch 3 teilbare Zahl erhöht. Es kann sich bei diesem Vorgehen also die Anzahl ausgehend von einem Papierstück am Anfang insgesamt nur um eine durch 3 teilbare Anzahl erhöhen.
Man kann also nur Anzahlen erhalten, die um 1 vermindert durch 3 teilbar sind.

Nun ist aber $2006 - 1 = 2005$ nicht durch 3 teilbar, denn die Quersumme von 2005 ist 7. Also kann man 2006 Papierstücke niemals erhalten.

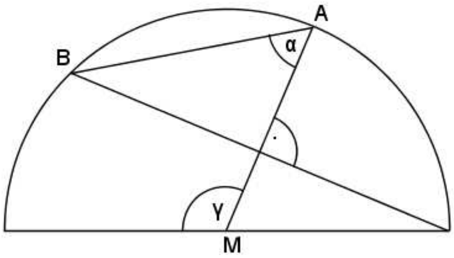
2. Beweisvorschlag:

Mit jedem Schneidevorgang werden aus einem Papierstück 7 oder 10 Papierstücke, mit jedem einzelnen Schneidevorgang erhöht sich die Gesamtzahl der Papierstücke also um 6 oder 9. Hat man *x* Mal in 7 Stücke geschnitten und *y* Mal in 10 Stücke, so kamen also *x* Mal 6 Stücke und *y* Mal 9 Stücke dazu. Da am Beginn bereits ein Stück vorhanden war, beträgt die Anzahl der Stücke am Ende: $1 + 6x + 9y$.

Nun kann man 3 ausklammern und erhält: $1 + 6x + 9y = 1 + 3 \cdot (2x + 3y)$.
Das zeigt, dass die Anzahl der erhaltenen Stücke immer um eins größer als eine durch 3 teilbare Zahl ist. Die Zahl 2006 ist aber nicht um 1 größer also eine durch 3 teilbar Zahl, denn 2005 ist nicht durch 3 teilbar. Man kann somit nicht 2006 Papierstücke erhalten.

Aufgabe 2

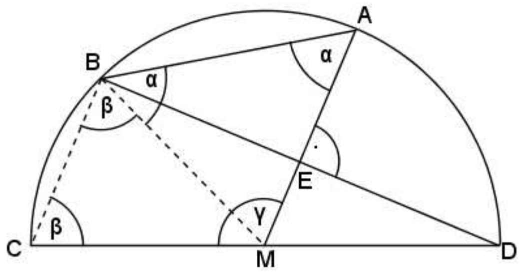
Wie kann man α berechnen, wenn γ gegeben ist?



Lösung: $\alpha = \gamma : 2$.

Im Folgenden werden die Endpunkte des gegebenen Durchmessers mit C und D, der Schnittpunkt von AM und BD mit E bezeichnet.

Beweis:



Vorbemerkungen:

(I) A und B liegen auf einem Kreis um M.
$\Leftrightarrow \overline{MA} = \overline{MB} \Leftrightarrow \angle BAM = \angle MBA = \alpha$
$\Rightarrow \angle AMB = 180^0 - 2 \cdot \alpha$

(II) B und C liegen auf einem Kreis um M.
$\Leftrightarrow \overline{MB} = \overline{MC} \Leftrightarrow \angle CBM = \angle MCB = \beta$
$\Rightarrow \angle BMC = 180^0 - 2 \cdot \beta$

(III) Aus $\angle AEB = 90^0$ folgt: $\angle EBA = \angle ABD = 90^0 - \alpha$

1. Beweisvorschlag: (Mit Wechselwinkeln)

(1) Nach Voraussetzung ist MA orthogonal zu BD.
Da B auf dem Thaleskreis über [CD] liegt, ist CB ebenfalls orthogonal zu BD.
Deshalb ist BC parallel zu MA.

(2) Die Winkel $\angle CBM$ und $\angle AMB$ sind Wechselwinkel an den parallelen Geraden CB und MA, deshalb ist: $\beta = \angle CBM = \angle AMB$.

(3) Zusammen mit (I) und (II) gilt:
$\angle BMC = 180^0 - 2 \cdot \beta = 180^0 - 2 \cdot (180^0 - 2 \cdot \alpha) = 4 \cdot \alpha - 180^0$.

(4) Aus (2) und (3) folgt: $\gamma = \angle BMC + \angle AMB = (4 \cdot \alpha - 180^0) + (180^0 - 2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \alpha$

Somit: $\alpha = \gamma : 2$.

2. Beweisvorschlag: (Mit dem Satz des Thales)

(1) Zusammen mit (III) erhält man: $\angle MBE = \angle MBA - \angle EBA = \alpha - (90^0 - \alpha) = 2 \cdot \alpha - 90^0$.

(2) Das Dreieck BCD ist rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei B, da B auf dem Thaleskreis über [CD] liegt. Mit dem Ergebnis aus (1) folgt daraus:
$\beta = \angle CBM = 90^0 - \angle MBE = 90^0 - (2 \cdot \alpha - 90^0) = 180^0 - 2 \cdot \alpha$

(3) Zusammen mit (2) und (II) gilt demnach:
$\angle BMC = 180^0 - 2 \cdot \beta = 180^0 - 2 \cdot (180^0 - 2 \cdot \alpha) = 4 \cdot \alpha - 180^0$

(4) Aus (3) und (I) folgt nun: $\gamma = \angle BMC + \angle AMB = (4 \cdot \alpha - 180^0) + (180^0 - 2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \alpha$

3. Beweisvorschlag: (Mit dem Kongruenzsatz Ssw)

(1) Mit (I) und (III) ergibt sich: $\angle MBE = \angle MBA - \angle EBA = \alpha - (90^0 - \alpha) = 2 \cdot \alpha - 90^0$

(2) Die Dreiecke BME und DME sind kongruent nach dem Kongruenzsatz Ssw, denn: $\overline{BM} = \overline{DM}$, $\overline{EM} = \overline{EM}$ und $\angle BEM = \angle MED = 90^0$.
Daher gilt: $\angle DME = \angle EMB = 180^0 - 90^0 - \angle MBE = 90^0 - (2 \cdot \alpha - 90^0) = 180^0 - 2 \cdot \alpha$

(3) Der Winkel EMC ist ein Nebenwinkel des Winkels DME. Daher gilt für seine Größe

$\gamma = 180^0 - \angle DME = 180^0 - (180^0 - 2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \alpha$.

4. Beweisvorschlag: (Mit dem Satz über Sehnenvierecke):

(1) Aus dem Winkelsummensatz für das Viereck CMAB folgt mit (I) und (II):
$\gamma = 360^0 - \alpha - (\alpha + \beta) - \beta = 360^0 - 2 \cdot \beta - 2 \cdot \alpha$.

(2) Nach Voraussetzung ist der Radius [MA] orthogonal zur Basis [BD] des gleichschenkligen Dreiecks BMD. Somit ist die Gerade ME die Mittelsenkrechte zur Basis [BD] und E ist Mittelpunkt der Strecke [BD]. Die beiden Dreiecke AEB und EDB sind folglich kongruent ($\overline{EB} = \overline{ED}$ und $\overline{EA} = \overline{EA}$ und $\angle ABE = \angle DEA$).
Somit ist: $\angle BAD = 2 \cdot \alpha$.

(3) Im Sehnenviereck CDAB ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu 180°.
Daraus folgt mit dem Ergebnis aus (2): $\beta = \angle MCB = 180^0 - 2 \cdot \alpha$.

(4) (3) in (1) eingesetzt, ergibt: $\gamma = 360^0 - 2 \cdot (180^0 - 2 \cdot \alpha) - 2 \cdot \alpha = 2 \cdot \alpha$.

5. Beweisvorschlag: (Mit dem Satz vom Mittelpunktswinkel)

(1) Der gegebene Kreis ist Fasskreis über [DA].
Folglich gilt Mit (III) für den Mittelpunktswinkel
$\angle DMA = 2 \cdot \angle DBA = 2 \cdot (90^0 - \alpha) = 180^0 - 2 \cdot \alpha$

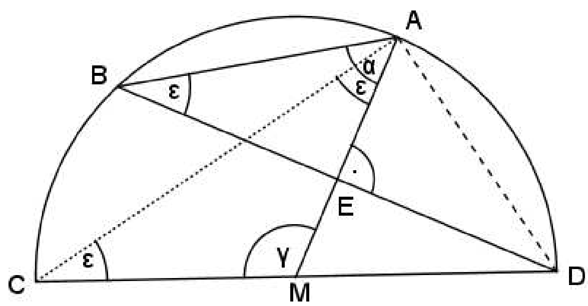
(2) Die Winkel DMA und AMC sind Nebenwinkel.
Deshalb folgt aus (1): $\gamma = 180^0 - \angle DMA = 180^0 - (180^0 - 2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \alpha$.

6. Beweisvorschlag: (Mit dem Umfangswinkelsatz):

(1) Die Punkte C und B liegen auf dem Fasskreis über [AD].
Daraus folgt zusammen mit (III):
$\varepsilon = \angle DCA = \angle DBA = 90^0 - \alpha$

(2) Das Dreieck CMA ist nach Voraussetzung gleichschenklig mit der Basis [BA].
Somit ist: $\angle MCA = \angle CAM = \varepsilon$.

(3) Wegen der Winkelsumme im Dreieck CMA folgt aus (2)
$\gamma = 180^0 - 2 \cdot \varepsilon = 180^0 - 2 \cdot (90^0 - \alpha) = 2 \cdot \alpha$



Aufgabe 3

Ein Quader mit quadratischer Grundfläche ist aus Würfeln der Kantenlänge 1 cm aufgebaut. Die Anzahl dieser Würfel ist so groß, wie die Anzahl der außen liegenden Würfelflächen.

Welche Kantenlängen kann der Quader haben?

Lösung:

Es gibt genau vier Möglichkeiten für einen Quader mit den geforderten Eigenschaften:

1) Länge und Breite 5 cm, Höhe 10 cm.
2) Länge und Breite 6 cm, Höhe 6 cm.
3) Länge und Breite 8 cm, Höhe 4 cm.
4) Länge und Breite 12 cm, Höhe 3 cm.

Beweis:

Im Folgenden wird mit a die Maßzahl der Seitenlänge der Grundfläche und mit h die Maßzahl der Höhe des Quaders bezeichnet. Laut Aufgabenstellung sind für a und h nur ganzzahlige Werte möglich.

Für den Quader werden insgesamt $a^2 \cdot h$ Würfel verwendet.
Die Anzahl der Würfelflächen, die außen an der Unterseite und der Oberseite des Würfels liegen ist jeweils a^2, an jeder der vier Seitenwände befinden sich $a \cdot h$ Würfelflächen. Die Gesamtzahl der außen liegenden Würfelflächen ist also: $2a^2 + 4ah$.

Laut Aufgabenstellung ist nun: $a^2 \cdot h = 2a^2 + 4ah$.

Teilt man diese Gleichung durch a, so ergibt sich $ah = 2a + 4h \Leftrightarrow ah - 4h = h \cdot (a-4) = 2a$.

Da für a=4 diese Gleichung zu der falschen Aussage 0=8 führt, muss $a \neq 4$ und $h = \frac{2a}{a-4}$ sein.

Durch Umformung erhält man:

$$h = \frac{2a}{a-4} = \frac{2(a-4)+8}{a-4} = 2 + \frac{8}{a-4}$$

Da h eine natürliche Zahl ist, muss a - 4 ein Teiler von 8 sein. Dafür gibt es nur die gesuchten vier Möglichkeiten:

a - 4	a	$h = \frac{2a}{a-4}$	Anzahl der Würfel $a^2 \cdot h$	Anzahl der außen liegenden Würfelflächen $2a^2 + 4ah$
1	5	10	250	250
2	6	6	216	216
4	8	4	256	256
8	12	3	432	432

Bei allen vier Lösungen sind also die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

Variante:

Die Gleichung $h = \frac{2a}{a-4}$ wird wie oben abgeleitet. Durch systematisches Probieren mit a = 5, 6, ..., 12 findet man die vier oben aufgeführten ganzzahligen Lösungen dieser Gleichung.

Nun ist noch zu zeigen, dass für größere Werte von a keine weiteren ganzzahligen Lösungen mehr auftreten. Dazu untersucht man den Bruch $\frac{2a}{a-4}$:

Wegen $2a > 2a - 8 = 2(a-4)$ ist für a > 4 der Zähler stets größer als das Doppelte des Nenners, der Bruch ist also immer größer als 2. Für a = 12 nimmt er den Wert 3 an.

Mit weiter wachsendem a wird der Wert des Bruchs $\frac{2a}{a-4}$ immer kleiner. Dies kann man der folgenden Tabelle mit auf zwei Dezimalen gerundeten Werten entnehmen:

a	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$\frac{2a}{a-4}$	3,00	2,89	2,80	2,73	2,67	2,62	2,57	2,53	2,50	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38	2,36

Der Wert nähert sich für wachsende a immer mehr der Zahl 2 an, ohne dass 2 erreicht werden kann.
Somit sind für a > 12 keine weiteren ganzzahligen Werte des Bruchs möglich und damit gibt es für a > 12 auch keine ganzzahligen Lösungen mehr.

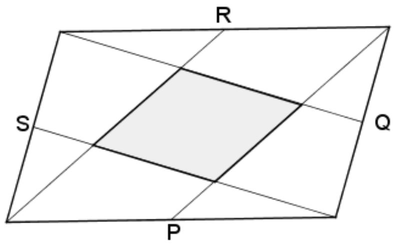
Für einen Beweis, dass der Wert des Bruchs $\frac{2a}{a-4}$ für wachsende a tatsächlich immer kleiner wird, muss man zeigen, dass für Zahlen a, b > 4 aus a < b die Ungleichung $\frac{2a}{a-4} > \frac{2b}{b-4}$ folgt.
Aus a < b folgt nämlich -8a > -8b und somit 2ab-8a > 2ab-8b.

Durch Ausklammern ergibt sich 2a·(b-4) > 2b·(a-4).

Dividiert man diese Ungleichung durch die Zahl (b-4)·(a-4), die für a, b > 4 positiv ist, so ergibt sich wie behauptet $\frac{2a}{a-4} > \frac{2b}{b-4}$.

Aufgabe 4

Die Punkte P, Q, R, S sind die Seitenmittelpunkte eines Parallelogramms. Bestimme den Anteil der markierten Fläche an der Gesamtfläche des Parallelogramms.



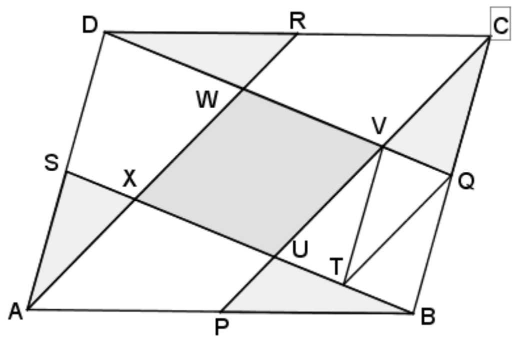
Lösung:

Der Flächeninhalt der markierten Fläche beträgt ein Fünftel des Flächeninhalts der Gesamtfläche des Parallelogramms.

Vorbemerkung:

Die vier Eckpunkte des Parallelogramms werden mit A, B, C und D, die vier Eckpunkte der markierten Fläche mit U, V, W und X bezeichnet (vgl. Zeichnung unten).
Da S und Q Seitenmittelpunkte der gegenüberliegenden Seiten eines Parallelogramms sind, ist $\overline{SD} = \overline{BQ}$ und SD $\parallel$ BQ Da ein Viereck mit einem Paar von gleich langen und parallelen gegenüberliegenden Seiten ein Parallelogramm ist, ist SBQD ein Parallelogramm, also SB $\parallel$ DQ. Analog folgt: AR $\parallel$ PC.
Damit ist gezeigt, dass die schraffierte Figur UVWX ein Parallelogramm ist.

1. Beweisvorschlag: (Mit Mittelparallelen)



Da P, Q, R und S Seitenmitten sind, beträgt der Flächeninhalt der vier Dreiecke ABS, BCP, CDQ und DAR jeweils ein Viertel des Flächeninhalts des großen Parallelogramms. Die Summe der Flächeninhalte dieser vier Dreiecke ist also so groß wie der Flächeninhalt des großen Parallelogramms. Die vier Dreiecke überdecken zusammen das ganze Parallelogramm ABCD, bis auf die markierte Fläche UVWX in der Mitte.
Andererseits überlappen sich die vier Dreiecke an den Ecken in den vier Dreiecken VQC, WRD, XSA, und UPB. Die überlappte Fläche muss genauso groß wie die nicht überdeckte Fläche sein, die Summe der Flächeninhalte der vier kleineren Dreiecke ist folglich ebenso groß wie der Flächeninhalt des markierten Parallelogramms.

Behauptung: Der Flächeninhalt des Dreiecks *VQC* beträgt ein Zwanzigstel des Flächeninhalts des großen Parallelogramms.

Beweis der Behauptung:

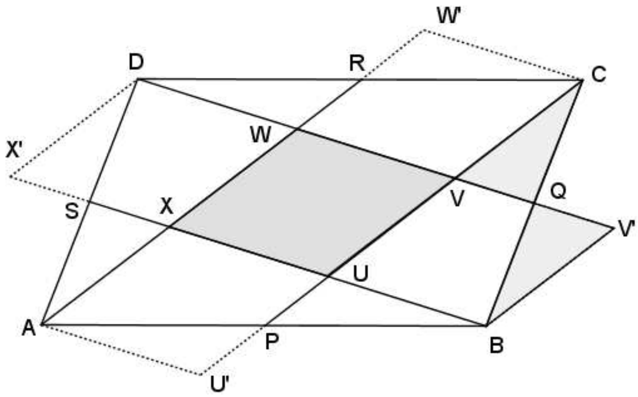
ΔPBU $\cong$ und ΔRDW, da $\overline{PB} = \overline{RD} \wedge \angle UBP = \angle WDR \wedge \angle BPU = \angle DRW$ (Z-Winkel).
Folglich: $F_{\Delta PBU} = F_{\Delta RDW}$. Analog: $F_{\Delta VQC} = F_{\Delta XSA}$.
Da nach Vorbemerkung VQ $\parallel$ UB und *Q* die Mitte von [BC] ist, ist [VQ] eine Mittelparallele im Dreieck UBC. Somit ist $2 \cdot \overline{VQ} = \overline{UB}$. Das Dreieck UBC ist also ähnlich zum Dreieck VQC mit dem Streckungsfaktor 2, es hat somit den Flächeninhalt $F_{\Delta UBC} = 4 \cdot F_{\Delta VQC}$.
Analog: $F_{\Delta VCD} = 4 \cdot F_{\Delta WRD}$.
(Dies könnte man auch erkennen, wenn man die beiden anderen Mittelparallelen [VT] und [QT] im Dreieck UBC einzeichnet: Dann wird das Dreieck UBC durch vier kleine Dreiecke parkettiert, die alle zum Dreieck VQC kongruent sind, so dass $F_{\Delta UBC} = 4 \cdot F_{\Delta VQC}$ (siehe obige Zeichnung) folgt.)

Es gilt: $F_{\Delta PBC} = F_{\Delta PBU} + F_{\Delta UBC} = F_{\Delta PBU} + 4 \cdot F_{\Delta VQC} = F_{\Delta WRD} + 4 \cdot F_{\Delta VQC}$
und $F_{\Delta QCD} = F_{\Delta VQC} + F_{\Delta VCD} = F_{\Delta VQC} + 4 \cdot F_{\Delta WRD}$
Da $F_{\Delta PBC} = F_{\Delta QCD}$, folgt: $F_{\Delta WRD} + 4 \cdot F_{\Delta VQC} = F_{\Delta VQC} + 4 \cdot F_{\Delta WRD}$, folglich: $F_{\Delta VQC} = F_{\Delta WRD}$
Also: $F_{\Delta PBC} = F_{\Delta WRD} + 4 \cdot F_{\Delta VQC} = F_{\Delta VQC} + 4 \cdot F_{\Delta VQC} = 5 \cdot F_{\Delta VQC}$
Mit $F_{\Delta PBC} = \frac{1}{4} \cdot F_{ABCD}$ folgt: $F_{\Delta VQC} = \frac{1}{5} \cdot F_{\Delta PBC} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot F_{ABCD} = \frac{1}{20} \cdot F_{ABCD}$.
Damit ist die Behauptung bewiesen.

Da die vier kleinen Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben und die Summe der Flächeninhalte der kleinen Dreiecke so groß ist wie der Flächeninhalt des markierten Parallelogramms UVWX, beträgt der Anteil der markierten Fläche an der Gesamtfläche also vier Zwanzigstel oder ein Fünftel.

2. Beweisvorschlag: (Mit Punktspiegelung)

Die Ecken U, V, W, X des markierten Parallelogramms werden an den Seitenmitten des großen Parallelogramms ABCD gespiegelt. Es entsteht eine kreuzförmige Figur U'UBV'VCW'WDX'XA , deren Flächeninhalt so groß ist wie der Flächeninhalt des ursprünglichen Parallelogramms, da nach Konstruktion die markierten Dreiecke gleich groß sind.



Behauptung: Diese Kreuzfigur lässt sich in 5 kongruente Parallelogramme zerlegen, wovon eins das markierte Parallelogramm ist. Der Anteil der markierten Fläche ist also ein Fünftel der Gesamtfläche.

Beweis der Behauptung:

(1) Ist V' der Bildpunkt von V bei der Spiegelung an Q, so liegt V' auf der Geraden DQ. Wegen $VQ \parallel UB$ (s. Vorbemerkung), gilt auch: $VV' \parallel UB$.

(2) BV' ist das Bild von VC bei der Punktspiegelung an Q, daher ist $BV' \parallel VC$.

(3) Aus (1) und (2) ergibt sich, dass UBV'V ein Parallelogramm ist, also $\overline{BV'} = \overline{UV}$.

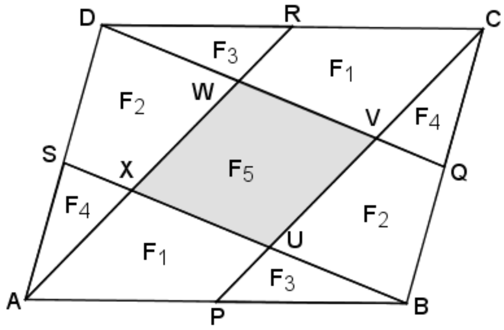
(4) Mit $\overline{BV'} = \overline{VC}$ folgt $\overline{UV} = \overline{VC}$. Analog kann man zeigen: $\overline{XU} = \overline{UB}$.

Aus (3) und (4) ergibt sich, dass das Parallelogramm UBV'V kongruent ist zum markierten Parallelogramm UVWX.

Analog kann man zeigen, dass auch die Vierecke AU'UX, CW'WV und DX'XW kongruent zum markierten Parallelogramm sind.

Damit ist gezeigt, dass sich die „Kreuzfigur“ in 5 kongruente Parallelogramme zerlegen lässt. Die Behauptung ist also bewiesen.

3. Beweisvorschlag:



Jedes Parallelogramm ist punktsymmetrisch bzgl. des Schnittpunktes seiner Diagonalen.

Bzgl. dieses Punktes sind demnach punktsymmetrisch
- die Eckpunkte A und C sowie B und D,
- demnach auch die Seitenmittelpunkte P und R sowie Q und S,
- demnach auch die Strecken [AR] und [PC] sowie [BS] und [QD],
- demnach auch deren Schnittpunkte U und W sowie X und V,
- demnach auch die Drei- und Vierecke, die mit gleichem F_i $(1 \le i \le 4)$ gekennzeichnet sind.

Daraus folgt:
- $AR \parallel PC$ und $BS \parallel QD$, d. h. das Vierecke UVWX ist ein Parallelogramm.
- Die mit gleichem F_i $(1 \le i \le 4)$ gekennzeichneten Flächen haben gleichen Flächeninhalt F_i.

Die Dreiecke ARD, APR, PCR und PBC
- überdecken das gegebene Parallelogramm vollständig und überschneidungsfrei,
- haben jeweils den gleichen Flächeninhalte (gleiche Grundlinienlänge und Höhenlänge).

Ihr Flächeninhalt ist demnach $\frac{F}{4}$, wobei F der Inhalt des gegebenen Parallelogramms ist.

Analoges gilt für die Dreiecke ABS, BQS, SQD und QCD.

Demnach ist der Flächeninhalt von

- Parallelogramm APCR: $F_{\Delta APR} + F_{\Delta PCR} = \frac{F}{4} + \frac{F}{4} = \frac{F}{2} = 2 \cdot F_1 + F_5$, (I)

- Parallelogramm BQDS: $F_{\Delta BQS} + F_{\Delta SQD} = \frac{F}{4} + \frac{F}{4} = \frac{F}{2} = 2 \cdot F_2 + F_5$, (II)

- Parallelogramm ABCD: $F = \frac{F}{2} + \frac{F}{2} = 2 \cdot F_1 + F_5 + 2 \cdot F_2 + F_5 = 2 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_5$, (III)

und $F = 2 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_3 + 2 \cdot F_4 + F_5$. (IV)

(III) – (IV) liefert: $F_5 = 2 \cdot F_3 + 2 \cdot F_4$. (V)

Da $\overline{BA} = 2 \cdot \overline{BP}$ und $PU \parallel AX$, bildet eine zentrische Streckung mit Zentrum B und Streckungsfaktor 2 das Dreieck PBU auf das Dreieck ABX ist.
Folglich: $F_{\Delta ABX} = F_1 + F_3 = 4 \cdot F_{\Delta PBU} = 4 \cdot F_3$. $\Rightarrow$ $F_1 = 3 \cdot F_3$. (VI)
Analog: $F_2 = 3 \cdot F_4$. (VII)

(VI) und (VII) in (III) eingesetzt und danach (V) verwendet, liefert:

$$F = 2 \cdot F_1 + 2 \cdot F_2 + 2 \cdot F_5 = 2 \cdot 3 \cdot F_3 + 2 \cdot 3 \cdot F_4 + 2 \cdot F_5 = 3 \cdot (2 \cdot F_3 + 2 \cdot F_4) + 2 \cdot F_5 = 3 \cdot F_5 + 2 \cdot F_5 = 5 \cdot F_5$$

Also: $F_5 = \frac{F}{5}$.

Aufgabe 5
Von vier verschiedenen Primzahlen, die alle größer als 5 sind, unterscheiden sich die größte und die kleinste um weniger als 10.

Zeige, dass die Summe dieser vier Primzahlen durch 60 teilbar ist.

Beispiele:

Die folgenden Beispiele zeigen, dass es unterhalb von 1000 vier solche „Primzahlvierlinge“ gibt, wie sie in der Aufgabe beschrieben werden:

1) 11,13,17,19; Summe 60
2) 101,103,107,109; Summe 420
3) 191,193,197,199; Summe 780
4) 821,823,827,829; Summe 3300

In allen Beispielen ist die Summe durch 60 teilbar. Das muss allgemein bewiesen werden.

Vorbemerkung:

In den folgenden Beweisvorschlägen wird jeweils der folgende Satz benötigt:

Sind p_1, $p_2 = p_1+2$ und $p_3 = p_1+4$ drei aufeinander folgende ungerade Zahlen, so ist genau eine von ihnen durch 3 teilbar.

Beweis:

Ist p_1 durch 3 teilbar, so existiert genau ein $n \in N$ mit $p_1 = 3 \cdot n$.
Dann sind $p_2 = 3 \cdot n+2$ und $p_3 = 3 \cdot n+4$ offensichtlich nicht durch 3 teilbar.
Ist p_1 nicht durch 3 teilbar, so existiert genau ein $n \in N$ mit $p_1 = 3 \cdot n \pm 1$.
Dann sind
- im +1-Fall $p_2 = 3 \cdot n+3$ durch 3 teilbar und $p_3 = 3 \cdot n+5$ nicht durch 3 teilbar,
- im -1-Fall $p_2 = 3 \cdot n+1$ nicht durch 3 teilbar und $p_3 = 3 \cdot n+3$ durch 3 teilbar.

1. Beweisvorschlag:

Gegeben sei ein Primzahlvierling wie in der Aufgabenstellung beschrieben. Die kleinste dieser Primzahlen sei p.

Da der Unterschied zwischen der kleinsten und größten Primzahl weniger als 10 ist und alle Primzahlen größer als 5 sein sollen, müssen die vier Primzahlen sich unter den fünf ungeraden Zahlen p, p+2, p+4, p+6, p+8 befinden.

Da – wie in der Vorbemerkung gezeigt – von drei aufeinander folgenden ungeraden Zahlen genau eine durch 3 teilbar ist, muss dies die mittlere Zahl p+4 sein, andernfalls gäbe es unter den fünf Zahlen p, p+2, p+4, p+6, p+8 zwei Zahlen, die durch 3 teilbar sind.

Unter den fünf aufeinander folgenden ungeraden Zahlen p, p+2, p+4, p+6, p+8 muss genau eine auf 5 enden und damit durch 5 teilbar sein. Wenn dies nicht die Zahl p+4 wäre - von der bereits gezeigt wurde, dass sie durch 3 teilbar ist – gäbe es höchstens drei Primzahlen unter diesen fünf Zahlen.

Also ist die Zahl p+4 sowohl durch 3 als auch durch 5 teilbar. Die Summe der vier Primzahlen p, p+2, p+6 und p+8 ist $4 \cdot p+16 = 4 \cdot (p+4)$. Dieser Ausdruck ist also durch 4, 3 und 5 teilbar. Da 3, 4 und 5 teilerfremd sind, ist dieser Ausdruck auch durch $3 \cdot 4 \cdot 5= 60$ teilbar.

2. Beweisvorschlag:

Voraussetzungen:

(V1) Die Zahlen p_1, p_2, p_3 und p_4 sind Primzahlen
(V2) $5 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4$
(V3) $p_4 – p_1 < 10$

Behauptung:
60 teilt $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$, d.h. 3, 4 und 5 sind Teiler von $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$.

Beweis der Behauptung:
Da alle vier Primzahlen größer als 5 sind (V2), kommt 5 nicht als Endziffer von einer der Primzahlen in Frage, denn Zahlen mit Endziffer 5 sind durch 5 teilbar. Da die Differenz aus der größten und der kleinsten der vier Primzahlen kleiner als 10 ist (V3), können nicht zwei der Zahlen die gleiche Endziffer haben. Die Primzahlen können als Endziffern also nur die Ziffern 1, 3, 7 und 9 haben. Dabei gibt es die folgenden vier Möglichkeiten für die Endziffernviertupel:
Fall 1: (1/3/7/9) Fall 2: (3/7/9/1) Fall 3: (7/9/1/3) Fall 4: (9/1/3/7)

Auf Grund der Vorbemerkung scheiden die Fälle 2, 3 und 4 aus, da in diesen drei aufeinander folgende ungerade Zahlen vorkommen.

Zu untersuchen ist somit ist nur Fall 1: $p_2 = p_1+2$, $p_3 = p_1+6$, $p_4 = p_1+8$

- **Nachweis der Teilbarkeit der Summe durch 5**
  Die Summe der vier Endziffern ist 1+3+7+9=20. Daher hat $p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ die Einerziffer 0 und ist folglich durch 5 teilbar.

- **Nachweis der Teilbarkeit der Summe durch 3**
  Ist $p_1 = 3\cdot n+1$, so ist $p_2 = p_1+2 = 3\cdot n+1+2 = 3\cdot(n+1)$ nicht prim. Widerspruch zu (V1)
  Somit ist: $p_1 = 3\cdot n+2$
  Die Summe der vier Primzahlen
  $$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 3\cdot n+2 + 3\cdot n+4 + 3\cdot n+8 + 3\cdot n+10 = 12\cdot n+24 = 3\cdot(4n+8)$$
  ist in diesem Fall durch 3 teilbar.

- **Nachweis der Teilbarkeit der Summe durch 4**
  p_1 ist ungerade. Folglich existiert eine natürliche Zahl n mit $p_1 = 4\cdot n+1$ oder $p_1 = 4\cdot n+3$.
  - Ist $p_1 = 4\cdot n+1$, so ist die Summe der vier Primzahlen
    $$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 4\cdot n+1 + 4\cdot n+3 + 4\cdot n+7 + 4\cdot n+9 = 16\cdot n+20 = 4\cdot(4\cdot n+5)$$
    durch 4 teilbar.
  - Ist $p_1 = 4\cdot n+3$, so ist die Summe der vier Primzahlen
    $$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 4\cdot n+3 + 4\cdot n+5 + 4\cdot n+9 + 4\cdot n+11 = 16\cdot n+28 = 4\cdot(4n+7)$$
    durch 4 teilbar.

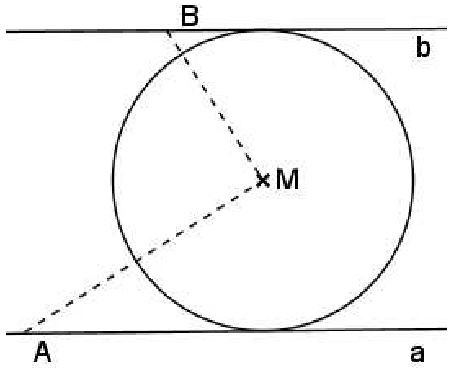
Zusammenfassung:
Damit ist gezeigt: Wenn die vier Primzahlen p_1, p_2, p_3 und p_4 die in der Voraussetzung genannten Eigenschaften haben, dann ist ihre Summe durch 60 teilbar.

Aufgabe 6

Die Geraden a und b sind parallele Tangenten an einen Kreis mit Mittelpunkt M.
Der Punkt A liegt auf der Tangente a, der Punkt B auf der Tangente b.

Beweise:

Die Gerade AB ist genau dann Tangente an den Kreis, wenn AM senkrecht zu BM ist.



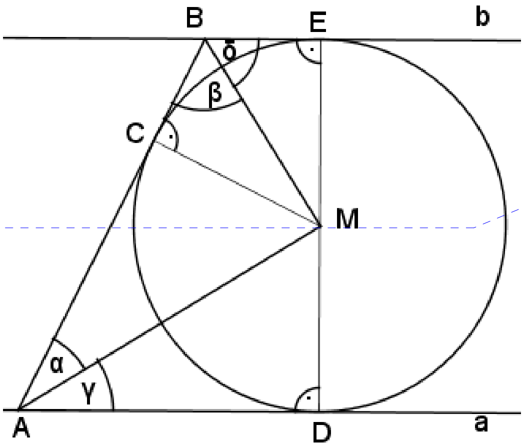
Lösung:

Zur Lösung muss man zwei Schlussrichtungen beweisen:

(A) Wenn die Gerade AB eine Tangente an den Kreis ist, so ist AM senkrecht zu BM.

(B) Wenn AM senkrecht zu BM ist, so ist die Gerade AB eine Tangente an den Kreis.

Beweisvorschlag für die Schlussrichtung (A):



Kommentar [MSOffice1]:

Voraussetzung: Die Gerade AB ist eine Tangente an den Kreis.

Dann sind die Dreiecke MEB und MBC nach dem Kongruenzsatz Ssw kongruent. Da

- $\overline{ME} = \overline{MC}$ ([ME] und [MC] Kreisradien)
- $\overline{MB} = \overline{MB}$
- $\angle BEM = \angle MCB = 90^0$ (Kreistangenten)

Somit ist: δ = β, also: $\angle CBE = 2 \cdot \beta$.

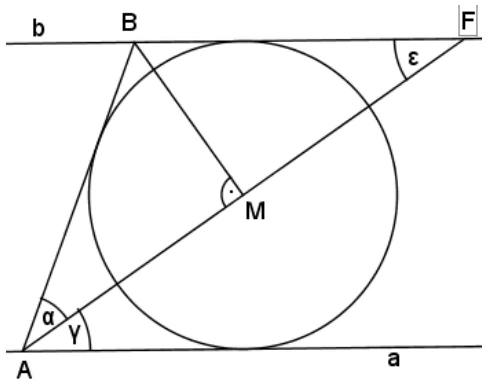
Analog ergibt sich: α = γ, also $\angle DAC = 2 \cdot \alpha$.

Die Winkel $\angle DAC$ und $\angle CBE$ sind Wechselwinkel an den parallelen Geraden a und b.
Sie ergänzen sind demnach zu 180^0.
Somit ist: $2 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta = 180^0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^0$.
Aus der Winkelsumme im Dreieck AMB folgt daher: $\angle BMA = 180^0 - (\alpha + \beta) = 90^0$.
Also ist AM senkrecht zu BM.

Variante für die Schlussrichtung (A):

Die Winkelgleichheiten δ = β und α = γ kann man auch so begründen:
Der Mittelpunkt M ist von den Geraden b und BA gleich weit entfernt, da dieser Abstand in beiden Fällen der Radius des Kreises ist. Somit liegt M auf der Winkelhalbierenden von $\angle CBE$, d.h. δ = β. Analog folgt: α = γ.

1. Beweisvorschlag für die Schlussrichtung (B): (Mit Abbildungen)



Voraussetzung: AM steht senkrecht auf BM.

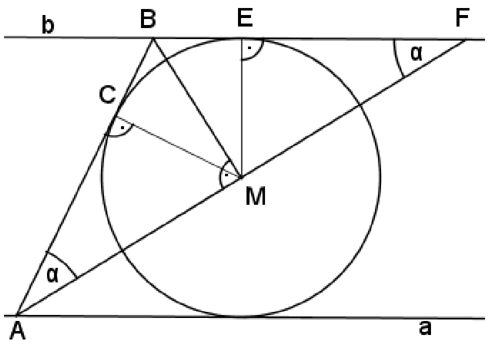
Die Gerade AM schneidet die Gerade b im Punkt F. Die Winkel werden wie in der Zeichnung benannt.
Bei Spiegelung am Kreismittelpunkt M wird die Tangente a auf die parallele Tangente b abgebildet.
Damit wird A auf F abgebildet und M ist der Mittelpunkt der Strecke [AF] ist. Folglich ist die

Gerade BM die Mittelsenkrechte von [AF], denn nach Voraussetzung steht ja BM senkrecht auf AF.

Damit ist gezeigt, dass das Dreieck AFB gleichschenklig mit der Spitze bei B ist. Somit gilt für die Basiswinkel dieses Dreiecks $\alpha = \varepsilon$. Außerdem ist $\varepsilon = \gamma$, denn ε und γ sind Wechselwinkel an den parallelen Geraden a und b. Somit ist $\alpha = \gamma$. Die Gerade AM ist also die Winkelhalbierende des Winkels zwischen den Geraden a und AB. Folglich wird a bei der Spiegelung an AM auf AB abgebildet, wobei der Kreis bei dieser Spiegelung an einer Geraden durch den Kreismittelpunkt in sich selbst überführt wird. Da a eine Tangente an den Kreis ist, ist auch das Bild AB von a eine Tangente an den Kreis.

2. Beweisvorschlag für die Schlussrichtung (B): (Mit Abstandsberechnungen)

Voraussetzung: AM steht senkrecht auf BM.



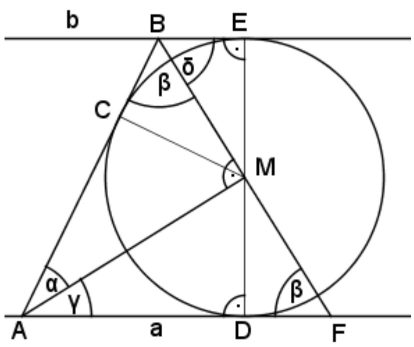
C ist der Fußpunkt des Lots von M auf die Gerade AB und E der Fußpunkt des Lots von M auf die Tangente b. Es ist dann $\overline{ME} = r$, wobei r der Radius des Kreises ist. Die Gerade AM schneidet b im Punkt F. Da M auf der Mittelparallelen zwischen a und b liegt und diese Mittelparallele alle Querstrecken des Streifens halbiert, gilt: $\overline{MA} = \overline{MF}$ und MB ist daher die Mittelsenkrechte zu [AF]. Somit ist das Dreieck AFB gleichschenklig mit Basis [AF]. Damit sind die Basiswinkel dieses Dreiecks beide gleich: $\angle MAC = \alpha$. Die Dreiecke FEM und CAM sind nach dem Kongruenzsatz WSW also kongruent. Es folgt $\overline{MC} = \overline{ME} = r$. Somit hat die Gerade AB von M gerade den Abstand r und sie ist somit eine Tangente an den Kreis.

3. Beweisvorschlag der Schlussrichtung (B): (Mit Winkelberechnungen)

Voraussetzung: AM steht senkrecht auf BM.

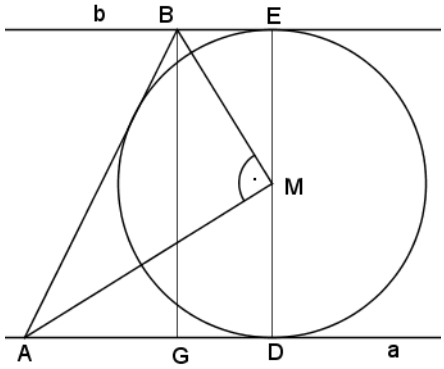
Da B außerhalb des Kreises liegt, gibt es neben b eine zweite Kreistangente durch B. Ihren Berührpunkt mit dem Kreis nennen wir C. Der Radius [MC] ist senkrecht zu BC. Es soll gezeigt werden, dass unter der Voraussetzung, dass AM senkrecht auf BM steht, der Punkt A auf dieser Tangente BC liegt.

F ist der Schnittpunkt der Geraden BM mit a, D der Fußpunkt des Lots von M auf a und E der Fußpunkt des Lots von M auf b.



Da M von b und BC gleich weit entfernt ist, liegt M auf der Winkelhalbierenden von $\angle CBE$, d.h. $\delta = \beta$.
Außerdem gilt: $\angle MBE = \angle MFA = \beta$.
(Wechselwinkel an den Parallelen a und b).
Die Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck AFM liefert: $\gamma = 90^0 - \beta$.
Deshalb ist im rechtwinkligen Dreieck BCM:
$\angle BMC = 90^0 - \beta = \gamma$. Es folgt:
$\angle CMA = \angle BMA - \angle BMC = 90^0 - \gamma = \beta$
Die Winkelsumme im rechtwinkligen Dreieck ADM ergibt ebenfalls: $\angle AMD = 90^0 - \gamma = \beta$.
Somit sind die Dreiecke ADM und CAM nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent.
Es folgt: $\angle CAM = \alpha = \angle MAD = \gamma$. Aus der Winkelsumme im Dreieck AMC ergibt sich:
$\angle ACM = 180^0 - \alpha - \beta = 180^0 - \gamma - \beta = 90^0$.
Somit ist $\angle ACB = 180^0$ ein gestreckter Winkel und *A* liegt daher auf der Geraden BC.

4. Beweisvorschlag: (Mit dem Satz des Pythagoras)



Es wird gezeigt, dass der Mittelpunkt M des Kreises von der Geraden AB den Abstand r hat. In diesem Fall berührt die Gerade den Kreis, ist also eine Tangente an diesen Kreis.

Es ist D der Fußpunkt des Lots von M auf a und E der Fußpunkt des Lots von M auf b. Außerdem ist BG eine Parallele zu ED durch B, wobei G auf a zwischen A und D liege, wie wir aus Symmetriegründen annehmen können.

In den rechtwinkligen Dreiecke ADM und MEB berechnen wir mit dem Satz von Pythagoras:

$$\overline{AM}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DM}^2 = u^2 + r^2 \Rightarrow \overline{AM} = \sqrt{u^2 + r^2}$$
$$\overline{BM}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EM}^2 = v^2 + r^2 \Rightarrow \overline{BM} = \sqrt{v^2 + r^2}$$

Hierbei ist $u = \overline{AD}$ und $v = \overline{BE}$.

Damit erhält man den Flächeninhalt F des nach Voraussetzung rechtwinkligen Dreiecks AMB:

(*) $$F = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{u^2 + r^2} \cdot \sqrt{v^2 + r^2}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks AMB kann auf eine zweite Weise berechnet werden. Die Länge der Strecke [AB] ergibt sich im rechtwinkligen Dreieck AEB nach dem Satz von Pythagoras:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GB}^2 = (u - v)^2 + (2 \cdot r)^2$$

Bezeichnet man den Abstand des Punktes M von der Geraden AB mit d, so folgt:

(**) $$F = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(u - v)^2 + (2 \cdot r)^2} \cdot d$$

Der Vergleich von (*) mit (**) und quadrieren ergibt:

(***) $$(u^2 + r^2) \cdot (v^2 + r^2) = [(u - v)^2 + 4 \cdot r^2] \cdot d^2$$

Einen weiteren Zusammenhang zwischen *u*, *v* und *r* erhält man über die beiden rechtwinkligen Dreiecke *ADM* und *MEB*. Diese Dreiecke sind ähnlich, da sie in allen drei Winkeln übereinstimmen.

Daher gilt: $\overline{AD} : \overline{DM} = \overline{ME} : \overline{EB} \Leftrightarrow u : r = r : v \Leftrightarrow r^2 = u \cdot v$

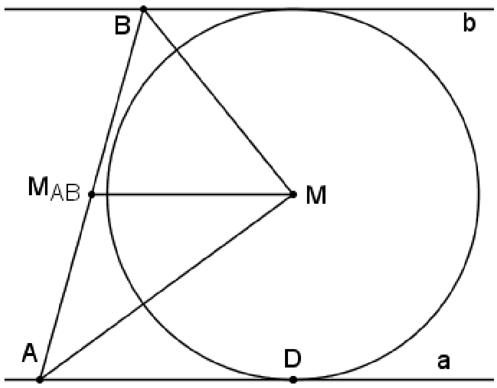
Durch Umwandeln von (***) und Einsetzen der letzen Beziehung ergibt sich:

$$(u^2 + u \cdot v) \cdot (v^2 + u \cdot v) = (u^2 - 2 \cdot u \cdot v + v^2 + 4 \cdot u \cdot v) \cdot d^2$$
$$\Leftrightarrow \quad u \cdot v \cdot (u + v)^2 = (u + v)^2 \cdot d^2$$
$$\Leftrightarrow \quad u \cdot v = d^2$$
$$\Leftrightarrow \quad d^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow \quad d = r$$

Die Gerade durch A und B hat somit vom Kreismittelpunkt M den Abstand r und ist daher Tangente an diesen Kreis. Dies war zu zeigen.

5. Beweisvorschlag:

Im Folgenden sind
- k der gegebene Kreis,
- D der Berührpunkt der Tangente a an den Kreis k,
- M_{AB} der Mittelpunkt der Strecke [AB].



Offensichtlich ist $M_{AB}M$ in jeder Lage von A und B die Mittelparallele zwischen den Tangenten a und b; damit ist: $\angle DAM = \angle M_{AB}MA$ (Wechselwinkel).

Es gelten folgende Äquivalenzschlüsse:

AB ist Tangente an k.

$\Leftrightarrow$ AM_{AB} ist Tangente von A an den Kreis k.

$\Leftrightarrow$ AM ist Winkelhalbierende von $\angle DAM_{AB}$.

$\Leftrightarrow$ $\angle MAM_{AB} = \angle DAM = \angle M_{AB}MA$ (siehe oben)

$\Leftrightarrow$ $\Delta AM_{AB}M$ ist gleichschenklig mit $\overline{M_{AB}A} = \overline{M_{AB}M}$.

$\Leftrightarrow$ M liegt auf dem Thaleskreis über [AB], da M_{AB} zusätzlich Mittelpunkt von [AB] ist.

$\Leftrightarrow$ $\angle BMA = 90^0$.

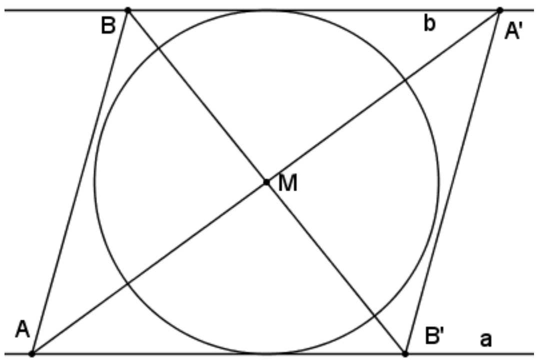
Bemerkung zum Fall: $M_{AB} = M \Leftrightarrow \angle AMB = 180^0$
Wenn A und B in verschiedenen Halbebenen bzgl. MD liegen, schneidet die Strecke [AB] die Strecke [DE] und damit auch den Kreis; AB kann also in keinem Fall Tangente sein.

6. Beweisvorschlag:

Im Folgenden wird der aus dem Unterricht bekannte Satz benutzt:

Ein Parallelogramm besitzt genau dann einen Inkreis, wenn es eine Raute ist.

Der Schnittpunkt von AM mit b wird mit A',
der Schmittpunkt von BM mit a mit B' bezeichnet.



Da M auf der Mittelparallelen von a und b liegt, halbiert M die Strecken [AA'] und [BB'].
Daher ist das Viereck AB'A'B punktsymmetrisch, also ein Parallelogramm.

Unter der Voraussetzung, dass AM senkrecht zu BM ist, also die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, ist AB'A'B eine Raute und diese besitzt einen Inkreis, womit gezeigt ist, dass AB eine Tangente an den Kreis ist.

Ist in einem Parallelogramm AB Tangente an den Kreis, so ist aufgrund der Symmetrie auch A'B' Tangente an den Kreis und das Parallelogramm AB'A'B besitzt demnach einen Inkeis, womit gezeigt ist, dass es eine Raute ist.
Bei Rauten stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Also ist AM senkrecht zu BM.