Landeswettbewerb Mathematik 2004/2005
Bayern
Lösungsvorschläge für die
Aufgaben der 2. Runde

Aufgabe 1

Die zwölf natürlichen Zahlen 1, 2, ..., 11, n (n>11) werden an die Kanten eines Oktaeders geschrieben. An jede Ecke schreibt man die Summe der vier Zahlen, die an den dort stehenden Kanten stehen.
Für welche Werte von n kann man an allen Ecken denselben Summenwert erhalten?

Ergebnis:

Man kann an allen Ecken genau dann denselben Summenwert erhalten, wenn n = 12 oder wenn n = 15.

***Beweis*:**

1. Die Bedingung ist notwendig:

Sei n so gewählt, dass an jeder der sechs Ecken der gleiche Summenwert steht; diesen nennen wir "Eckenzahl" und verwenden für ihn die Variable e.

Da jede Kante zu genau zwei Ecken gehört und ihre Kantenzahl damit in genau zwei Eckenzahlen eingeht, ist die Summe aller Eckenzahlen doppelt so groß wie die Summe der Kantenzahlen; es ist also

$$6e = (1+2+\ldots+11+n)\cdot 2 = 132+2n \quad \text{oder} \quad e = \frac{132+2n}{6} = 22+\frac{n}{3}.$$

Da die Eckenzahl e eine natürliche Zahl ist, erhalten wir als erste notwendige Bedingung: n muss durch 3 teilbar sein.

Nun betrachten wir die beiden Ecken, die zur Kante mit Kantenzahl n gehören. Wie an jeder anderen Ecke des Oktaeders treffen dort jeweils weitere drei Kanten zusammen; deren Kantenzahlen seien mit x_1, x_2, x_3 bzw. x_4, x_5, x_6 bezeichnet. Mit diesen Bezeichnungen ist $e = x_1+x_2+x_3+n = x_4+x_5+x_6+n$ oder $2(e-n) = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6$.

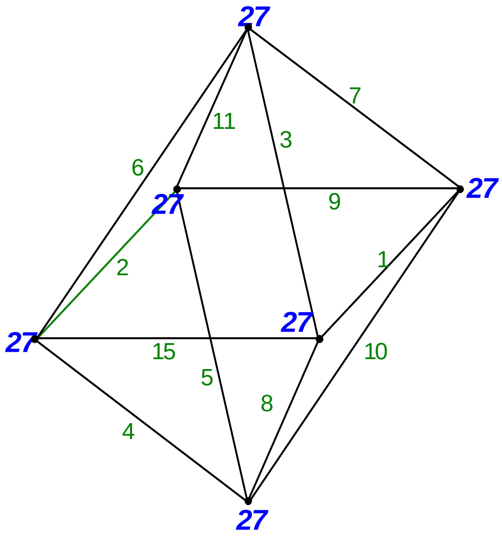
Die Zahlen $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sind paarweise verschiedene natürliche Zahlen, daher ist $2(e-n) = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \geq 1+2+3+4+5+6 = 21$, d.h. $(e-n) \geq 10{,}5$. Hier setzen wir das obige Ergebnis $e = 22+\frac{n}{3}$ ein und und lösen nach n auf: $22+\frac{n}{3} - n \geq 10{,}5 \Leftrightarrow$ $n \leq 17{,}25$. Zusammen mit der Voraussetzung in der Aufgabenstellung erhält man als zweite notwendige Bedingung: $11 < n \leq 17{,}25$.

Zusammen mit der ersten notwendigen Bedingung folgt n = 12 oder n = 15.

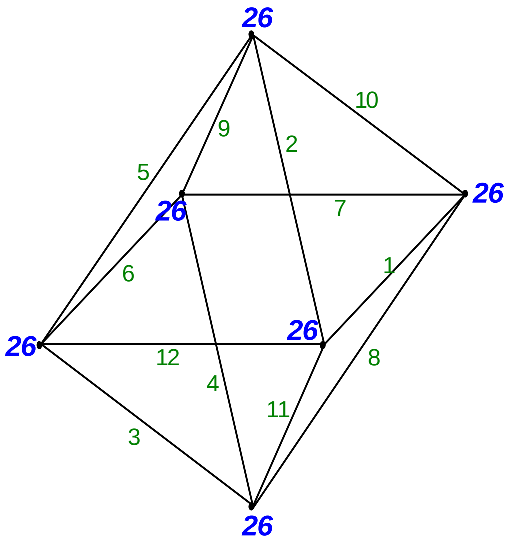
2. Die Bedingung ist hinreichend:

Sei n = 12 (hieraus ergibt sich die Eckenzahl e = 22 + 12:3 = 26), oder n = 15 (hieraus ergibt sich e = 22 + 15:3 = 27). Durch geschicktes Probieren findet man die folgenden Beschriftungen, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllen:

n = 12:



n = 15:



(Bei Probieren geht man am besten zunächst von der Kante mit Kantenzahl n aus und untersucht die möglichen Ergänzungen mit drei verschiedenen Summanden auf die berechnete Eckenzahl.)

Aufgabe 2

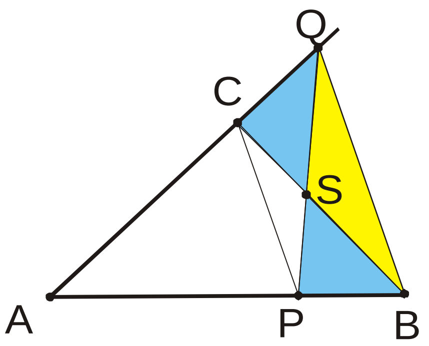
Auf der Seite [AB] eines Dreiecks ABC liegt ein von A und B verschiedener Punkt P. Zwei Geraden durch P zerlegen die Dreiecksfläche in drei Teile.
Konstruiere die Geraden so, dass die drei Flächenstücke den gleichen Inhalt haben.

1. Lösungsmöglichkeit:

Vorüberlegung:

Gegeben sind ein Dreieck ABC und ein Punkt P auf der Halbgeraden [AB.
Ist Q der Schnittpunkt der Parallelen zu PC durch B mit der Geraden AC, dann haben die Dreiecke ABC und APQ den gleichen Flächeninhalt.

Beweis der Vorüberlegung:

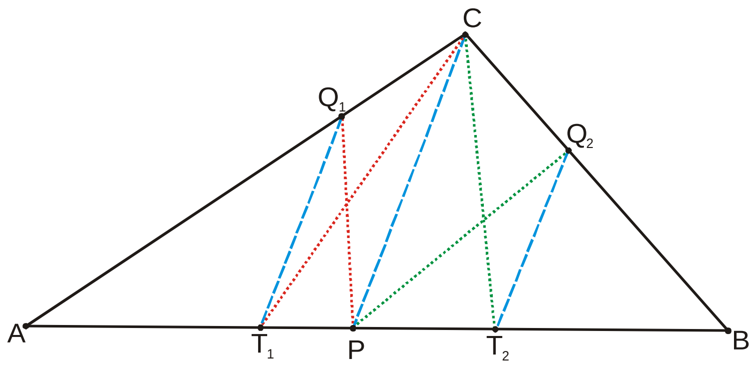


Der Flächeninhalte $F_{\Delta BQC}$ und $F_{\Delta BQP}$ sind gleich, da beide Dreiecke die gleiche Grundseite [BQ] und die gleiche Höhe haben.
Ist S der Schnittpunkt der Strecken [BC] und [PQ], so gilt:
$F_{\Delta PSB} = F_{\Delta BQP} - F_{\Delta BQS} = F_{\Delta BQC} - F_{\Delta BQS} = F_{\Delta CSQ}$.
Damit gilt:
$F_{\Delta ABC} = F_{\square APSC} + F_{\Delta BSP} = F_{\square APSC} + F_{\Delta CSQ} = F_{\Delta APQ}$.

Lösung der Aufgabe:

Man konstruiert auf der Strecke [AB] die Teilungspunkte T_1und T_2 mit
$\overline{AT_1} = \overline{T_1T_2} = \overline{T_2B} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.
Die Parallelen zu PC durch T_1 bzw. T_2 schneiden [AC] oder [BC] in Q_1 bzw. Q_2.
Dann sind die Geraden PQ_1 und PQ_2 die gesuchten Geraden.

Beweis:



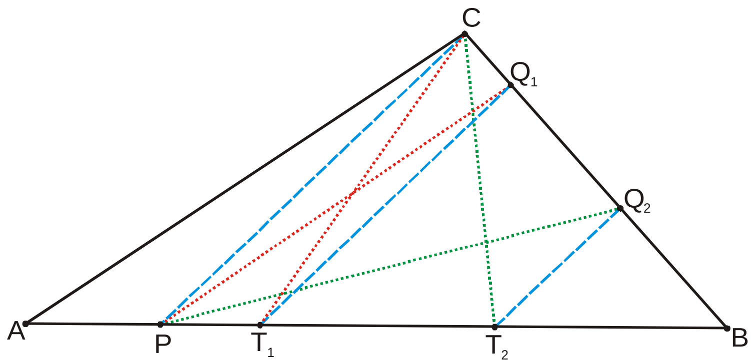
Das Dreieck ABC wird durch die Strecken $[T_1C]$ und $[T_2C]$ in drei gleich große Dreiecke geteilt, da diese Dreiecke gleich lange Grundseiten und Höhen haben.

Fall 1: $P \in [T_1T_2]$, $Q_1 \in [AC] \wedge Q_2 \in [BC]$

Auf Grund der Vorüberlegung haben die Dreiecke APQ_1 und BQ_2P und damit auch das Viereck PQ_2CQ_1 den Inhalt $\frac{1}{3} \cdot F_{\Delta ABC}$.

Die Geraden PQ_1 und PQ_2 sind demnach die gesuchten Geraden.

Fall 2: P∈ [AT_1]; d.h. Q_1, Q_2∈ [BC]



Auf Grund der Vorüberlegung haben die Dreiecke PBQ_2 und PQ_2Q_1 und damit auch das Viereck APQ_1C den Inhalt $F_{\Delta ABC}$:3.

Die Geraden PQ_1 und PQ_2 sind demnach die gesuchten Geraden.

Fall 3: P∈ [T_2B], d.h. Q_1, Q_2∈ [AC]

In diesem Fall ist der Beweis analog zu Fall 2. Nur die Rolle von A und B ist vertauscht.

Beweisvariante ohne die Vorüberlegung:

Fall1: $F_{\Delta APQ_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot d(Q_1;AB)$

$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot h_c \cdot \frac{\overline{AQ_1}}{\overline{AC}}$ (Strahlensatz mit Zentrum A)

$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AP} \cdot h_c \cdot \frac{\overline{AT_1}}{\overline{AP}}$ (Strahlensatz mit Zentrum A)

$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AT_1} \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} \cdot h_c = \frac{1}{3} \cdot F_{\Delta ABC}$

Analog (nur mit Zentrum B bei Anwendung des Strahlensatzes): $F_{\Delta PBQ_2} = \frac{1}{3} \cdot F_{\Delta ABC}$

Damit gilt auch: $F_{PQ_2Q_1C} = \frac{1}{3} \cdot F_{\Delta ABC}$

Fall 2: $F_{\Delta PBQ_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{PB} \cdot d(Q_2;AB)$

$= \frac{1}{2} \cdot \overline{PB} \cdot h_c \cdot \frac{\overline{BQ_2}}{\overline{BC}}$ (Strahlensatz mit Zentrum B)

$= \frac{1}{2} \cdot \overline{PB} \cdot h_c \cdot \frac{\overline{BT_2}}{\overline{BP}}$ (Strahlensatz mit Zentrum B)

$= \frac{1}{2} \cdot \overline{BT_2} \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} \cdot h_c = \frac{1}{3} \cdot F_{\Delta ABC}$

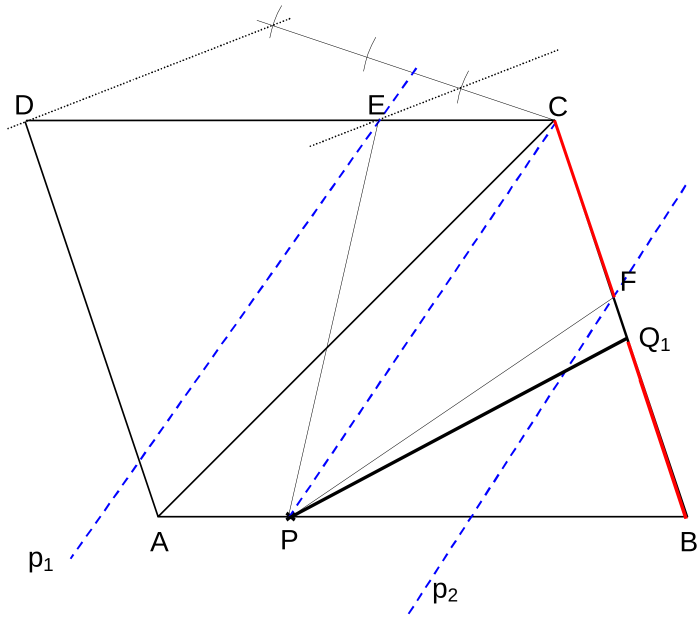
$F_{\Delta PQ_2Q_1} = \frac{1}{2} \cdot \overline{Q_2Q_1} \cdot d(P;BC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{Q_2B} \cdot d(P;BC)$

$= F_{\Delta PBQ_2} = \frac{1}{3} \cdot F_{\Delta ABC}$

Damit gilt auch: $F_{APQ_1C} = \frac{1}{3} \cdot F_{\Delta ABC}$

Fall 3: Analoge Argumentation wie im Fall 2 nur mit Zentrum A bei Anwendung des Strahlensatzes.

2. Lösungsmöglichkeit:



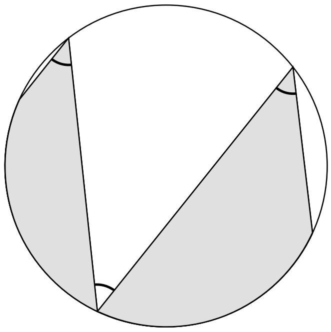
Das gegebene Dreieck ABC wird zum Parallelogramm ABCD ergänzt. Dieses Parallelogramm hat den doppelten Flächeninhalt wie das Dreieck ABC.
Die Seite [CD] wird durch den Punkt E im Verhältnis 1:2 von C aus geteilt. Dann hat das Dreieck PCE (genauso wie EAC) ein Sechstel des Flächeninhalts des Parallelogramms ABCD und daher ein Drittel des Inhalts von Dreieck ABC.
Nun wird die Parallele p_1 zu PC durch E konstruiert und an PC gespiegelt. Das Spiegelbild ist p_2.
Wenn $\overline{PB} \geq \overline{EC} = \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$ ist, so ist der Abstand von B zu PC größer als der von E zu PC und daher schneidet die Gerade p_2 die Strecke [BC] in einem Punkt F.
Da die beiden Parallelen nach Konstruktion von PC denselben Abstand haben, ist ΔPFC flächengleich mit ΔPCE. Der Flächeninhalt der beiden Dreiecke ist ein Drittel des Flächeninhalts von ΔABC. Nun verschiebt man die Strecke [CF] längs CB so, dass F auf B fällt. Der Bildpunkt von C heißt Q_1.
ΔPBQ_1 hat denselben Flächeninhalt wie ΔPFC, da beide Dreiecke gleichlange Grundseiten und Höhen haben. Somit ist die Gerade PQ_1 für den Fall $\overline{PB} \geq \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$ konstruiert.

Wenn $\overline{PB} \geq \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}$ ist, so liegt auch der zweite Teilpunkt Q_2 auf [BC]. Man erhält ihn durch Spiegelung von B an Q_1. In diesem Fall ist $\overline{BQ_1} \leq \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Im Fall $\frac{1}{3} \cdot \overline{AB} \leq \overline{PB} \leq \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}$ ist die Strecke [BQ_1] länger ist als die Hälfte der Seite [BC], also liegt der zweite Teilpunkt auf [AC]. Diesen Teilpunkt erhält man auf analoge Weise wie den Teilpunkt Q_1 auf [BC], man ergänzt nur das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm, dessen eine Seite [AB] ist und dessen andere Seite auf AC liegt.

Genauso kann man schließlich verfahren, wenn $\overline{PB} \leq \frac{1}{3} \cdot \overline{AB}$. Dann liegen beide Teilpunkte auf der Strecke [AC]. Der erste Teilpunkt wird so konstruiert, wie es gerade für Q_2 beschrieben wurde. Den zweiten erhält man in diesem Fall durch Spiegeln von A am ersten Teilpunkt.

Aufgabe 3



Die drei gekennzeichneten Winkel sind jeweils 45°-Winkel. Bestimme den Anteil der markierten Fläche an der Kreisfläche.

Vorbemerkungen

Die gemeinsamen Punkte von Kreis und Winkel werden wie in der untenstehenden Figur mit A, B, C, D und E bezeichnet.

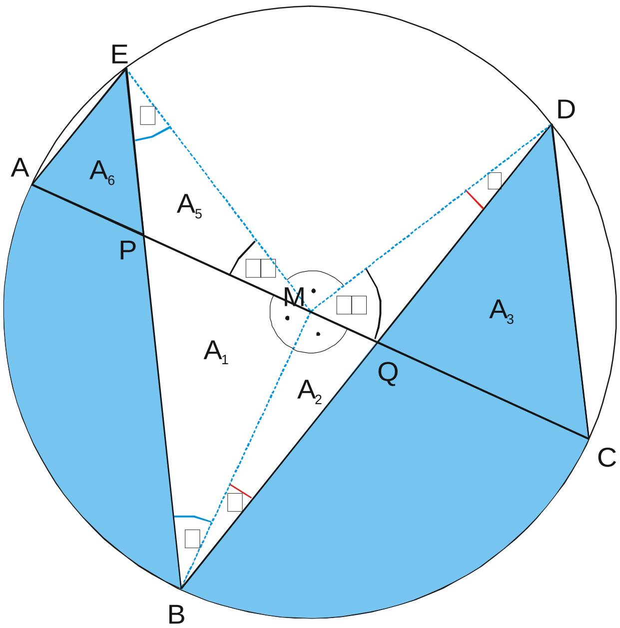
1. Der Winkel $\angle AEB$ hat nach Aufgabenstellung die Weite 45°. Es ist der Umfangswinkel zur Sehne [AB]. Der zugehörigen Mittelpunktswinkel $\angle AMB$ hat daher die doppelte Weite, also 90°. Analog ist $\angle BMC$ ein rechter Winkel als Mittelpunktswinkel zur Sehne [BC].

2. Die Winkel $\angle AMB$ und $\angle BMC$ ergänzen sich also zu 180°. Die Strecke [AC] ist deshalb ein Kreisdurchmesser und halbiert den Kreis.

3. Es ist $\angle DME = 90°$, denn dieser Winkel ist der Mittelpunktswinkel zur Sehne [ED], die nach Aufgabenstellung den Umfangswinkel $\angle DBE = 45°$ hat.

1. Lösungsmöglichkeit:

Mit A_1, A_2, …, A_6 werden die Flächeninhalte der in der nebenstehenden Figur gekennzeichneten Dreiecke PBM usw. bezeichnet.



Behauptung: $A_1 + A_2 = A_3 + A_6$

Wenn diese Behauptung gezeigt ist, so kann man die Dreiecke PBM und BQM statt APE und QCD markieren. Die markierte Fläche bleibt dabei gleich groß und ihr Anteil an der Kreisfläche ist somit der eines Halbkreises, also ½.

Beweis der Behauptung:

Das Dreieck BDM ist gleichschenklig mit dem Basiswinkel ε. Da [EM] orthogonal zu [DM] ist (Vorbemerkung 3), hat der Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks AME die Weite 2ε. Das Dreieck BDM mit den Schenkellängen r und dem Basiswinkel ε lässt sich, wenn man es entlang der Mittelsenkrechten zur Basis auftrennt, in ein flächengleiches Dreieck mit den Schenkellängen r und der Winkelweite 2ε umlegen. Dieses Dreieck ist dann kongruent zum Dreieck AME (Kongruenzsatz SWS). Deshalb sind die Dreiecke AME und BDM flächengleich. Entsprechend sind die Dreiecke CDM und EBM flächengleich (verwende φ statt ε). Es ergibt sich

$$A_2 + A_4 = A_5 + A_6 \text{ und } A_1 + A_5 = A_3 + A_4.$$

Addiert man die linken bzw. rechten Seien dieser zwei Gleichungen und vereinfacht, so folgt daraus: $A_1 + A_2 = A_3 + A_6$. Die Behauptung ist also bewiesen.

Variante zur 1. Lösungsmöglichkeit:

In der 1. Lösungsmöglichkeit wurde die Flächengleichheit der Dreiecke AME und BDM bzw. der Dreiecke CDM und EBM bewiesen. Diese Flächengleichheit kann man auch mit etwas Trigonometrie zeigen:
Das Dreieck BDM ist gleichschenklig mit Basis [BD], Basiswinkel ε, und Schenkellänge *r*.
Wenn man als Grundseite *g* die Basis [BD] nimmt und mit h die zugehörige Höhe bezeichnet, so gilt $\cos(\varepsilon)=\frac{g}{2r}$ und $\sin(\varepsilon)=\frac{h}{r}$. Der Flächeninhalt von ΔBDM ist daher
$F_{\Delta BDM}=\frac{1}{2}gh=\frac{1}{2}2r\cos(\varepsilon)r\sin(\varepsilon)=\frac{1}{2}r^2\sin(2\varepsilon)$, denn es gilt die Beziehung
$\sin(2\varepsilon)=2\sin(\varepsilon)\cos(\varepsilon)$ (vgl. Formelsammlung).
Es ist wie in der 1. Lösungsmöglichkeit $\angle EMA=2\varepsilon$. Der Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks AME ist daher $F_{\Delta AME}=\frac{1}{2}r^2\sin(180°-2\varepsilon)=\frac{1}{2}r^2\sin(2\varepsilon)$, also $F_{\Delta AME}=F_{\Delta BDM}$.
Die analoge Berechnung liefert: $F_{\Delta EBM}=F_{\Delta CDM}$.
Wie in der 1. Lösungsmöglichkeit folgt aus dieser Flächengleichheit die Behauptung.

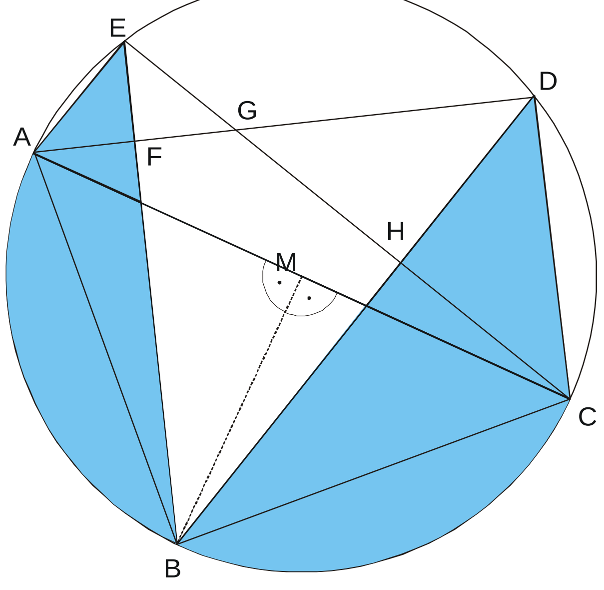
2. Lösungsmöglichkeit:

Fasst man die gegebenen 45^{O}-Winkel als Winkel an Geradenkreuzungen (Z-Winkel) auf, so folgt:
[DC] ∥ [BE] und [BD] ∥ [AE]. (1)

Nach Vorbemerkung 2. ist der gegebene Kreis der Thaleskreis über [AC], d.h.
[AD] ⊥ [DC] und [AB] ⊥ [BC]. (2)

Aus (1) und (2) folgt:
[AD] ⊥ [EB] und [EC] ⊥ [BD].

Es ergeben sich die gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke AFE, EFG, GHD, HCD, FBD und ABM.



Bezeichnet man die Länge der Strecke [AF] mit x, so gilt: $x=\overline{AF}=\overline{EF}=\overline{FG}$.
Bezeichnet man die Länge der Strecke [BF] mit y, so gilt: $y=\overline{BF}=\overline{FD}$ und $\overline{GD}=y-x$.

Mit dem Satz des Pythagoras folgt: $\overline{BD}=\sqrt{2}y$ und $\overline{GH}=\overline{HD}=\overline{HC}=\frac{y-x}{\sqrt{2}}$.

Der Satz des Pythagoras, einmal angewandt auf das Dreieck ABF und einmal auf das Dreieck ABM, liefert die Beziehung $x^2+y^2=r^2+r^2=2r^2$.

Damit ergeben sich die Flächeninhalte der Dreiecke ABE und BCD zu
$F_{\Delta ABE}=\frac{1}{2}x(x+y)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}xy$ und $F_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\sqrt{2}y\left(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}xy$.

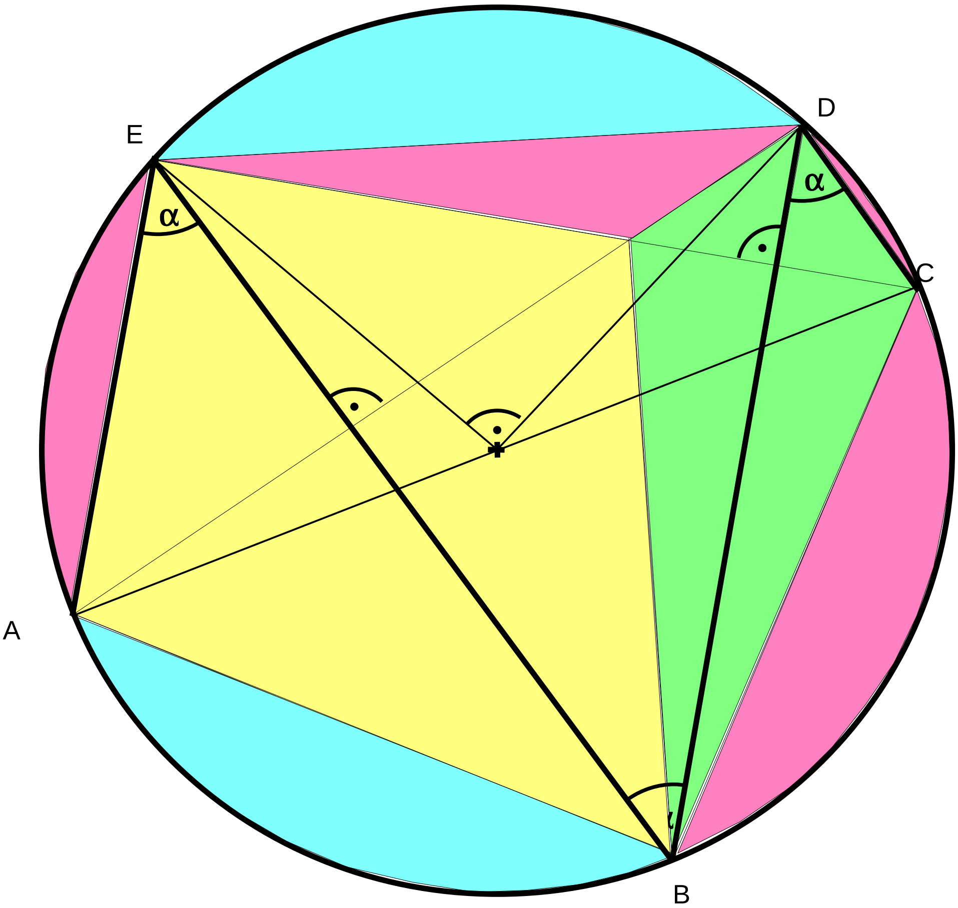
Somit ist: $F_{\Delta ABE} + F_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}x(x+y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = r^2$.

Die markierte Fläche besteht aus dem Halbkreis von A über B zu C ohne das Dreieck ABC, aber ergänzt um die Dreiecke BCD und ABE. Somit ist ihr Flächeninhalt:

$$\frac{\pi r^2}{2} - F_{\Delta ABC} + F_{\Delta ABE} + F_{\Delta BCD} = \frac{\pi r^2}{2} - r^2 + r^2 = \frac{\pi r^2}{2}.$$

Die markierte Fläche ist halb so groß wie die Kreisfläche.

3. Lösungsmöglichkeit:



Der obigen Zeichnung kann man entnehmen, dass genau die Hälfte des Kreises in der Aufgabe dunkel markiert ist. Es ist α=45°, die rechten Winkel ergeben sich gemäß der Vorüberlegungen. In der Zeichnung ist das gesamte Kreisinnere farbig gezeichnet.

Da $\angle AEB = 45^{\circ}$ und $\angle AEC = 90^{\circ}$ folgt $\angle BEC = 45^{\circ}$; außerdem: AD $\perp$ BE.

Aus beiden Aussagen folgt: Das gelbe Viereck ist ein Drachenviereck.

Analog kann gezeigt werden, dass auch das grüne Viereck ein Drachenviereck ist.

Genau die Hälfte der gelben und grünen Drachenvierecke gehört gemäß Aufgabenstellung zur markierten Fläche. Die beiden hellblauen Kreissegmente sind Segmente von Viertelkreisen wegen der rechten Winkel, also ebenfalls gleich groß. Das obere Segment gehört nicht zur markierten Fläche, das untere Segment gehört dazu. Die rosa markierten Restflächen, die oberhalb von [AC] liegen, kann man genau zu dem rosa Segment unterhalb von [AC] zusammensetzen, denn es ist das Segment eines Viertelkreises. Nur das Kreissegment unterhalb von [AC] gehört zur markierten Fläche. Genau die Hälfte des Kreises ist also markiert.

Aufgabe 4

Welche Stammbrüche lassen sich auf genau eine Weise als arithmetisches Mittel von zwei verschiedenen Stammbrüchen darstellen?

Bemerkung:
Ein Stammbruch ist ein Bruch mit dem Zähler 1 und einer natürlichen Zahl als Nenner.

Lösung:

Ein Stammbruch lässt sich genau dann auf genau eine Weise als arithmetisches Mittel von zwei verschiedenen Stammbrüchen darstellen, wenn der Nenner eine ungerade Primzahl oder das Doppelte einer Primzahl ist.

1. Beweismöglichkeit:

Nach Aufgabenstellung soll untersucht werden, für welche natürliche Zahlen n die Gleichung $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{n}$ genau zwei Lösungspaare $(a_1;b_1)$ und $(a_2;b_2)$ mit $a_i \neq b_i$ sowie $a_1 = b_2$ und $a_2 = b_1$ besitzt.

Durch Äquivalenzumformungen erhalten wir

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{2}{n}-\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{2\cdot b-n}{b\cdot n} \Leftrightarrow a=\frac{b\cdot n}{2\cdot b-n} \Leftrightarrow a=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{2\cdot b-n} \quad (*).$$

Fall 1: n ist gerade; d.h. $n = 2\cdot c$ für eine geeignete positive ganze Zahl c.

Dann erhält die letzte Gleichung die Form $a=c+\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{2\cdot b-n} \Leftrightarrow a=c+\frac{c^2}{b-c}$.

Aus (*) und der davor stehenden äquivalenten Gleichung folgt, dass a genau dann eine natürliche Zahl ist, wenn $b–c$ ein positiver Teiler von c^2 ist.

Fall 1.1: $c = 1$. Dann ist $n = 2$, $b = 2$ und $a = 2$; d.h. es gibt keine Lösung mit verschiedenen a und b.

Fall 1.2 c ist Primzahl. Dann hat c^2 die paarweise verschiedenen Teiler 1, c und c^2 und nur diese; es ist also entweder

$b_1–c = 1$, also $b_1 = c+1$ und $a_1 = c+c^2$ oder
$b_2–c = c$, also $b_2 = 2\cdot c$ und $a_2 = 2\cdot c$ oder
$b_3–c = c^2$, also $b_3 = c+c^2$ und $a_3 = c+1$.

Die erste und dritte Möglichkeit führen zum gleichen Paar von Stammbrüchen, die (*) erfüllen, die mittlere Möglichkeit führt zu einem Paar identischer Stammbrüche.

Fall 1.3 Ist c keine Primzahl, also $c = p\cdot q$ für geeignete ganzzahlige p und q, die beide größer als 1 sind. Dann hat c^2 mindestens die verschiedenen Teiler 1 und p; wir konstruieren Lösungen über

$b_1–c = 1$, also $b_1 = c+1$ und $a_1 = c+c^2$ oder
$b_2–c = p$, also $b_2 = c+p$ und $a_2 = c+p\cdot q^2$.

Da $p > 1$, $q > 1$ und $p\cdot q = c^2$,
ist $b_1 = c+1 < b_2 = c+p < a_2 = c+p\cdot q^2 < a_1 = c+c^2$;
wir haben im Fall 1.3 also zwei verschiedene Paare von Stammbrüchen gefunden, die (*) erfüllen.

Fall 2: n ist ungerade. Analog der obigen Überlegung ist die Zahl a genau dann eine natürliche Zahl, wenn $2\cdot b - n$ ein positiver Teiler von n^2 ist.

Fall 2.1: $n = 1$. Dann ist 1 der einzige Teiler von $n^2 = 1$, also $2\cdot b - 1 = 1$; hieraus erhält man $b = a = 1$; d.h. es gibt keine Lösung mit verschiedenen a und b.

Fall 2.2 n ist ungerade Primzahl. Dann hat n^2 die Teiler 1, n und n^2 und nur diese; es ist also entweder

$2\cdot b_1 - n = 1$, also $b_1 = {}^1/_2\cdot(n+1)$ und $a_1 = {}^1/_2\cdot(n+n^2)$ oder
$2\cdot b_2 - n = n$, also $b_2 = n$ und $a_2 = {}^1/_2\cdot(n+n) = n$ oder
$2\cdot b_3 - n = n^2$, also $b_3 = {}^1/_2\cdot(n+n^2)$ und $a_3 = {}^1/_2\cdot(n+1)$

Die erste und dritte Möglichkeit führen zum gleichen Paar von Stammbrüchen, die (*) erfüllen, die mittlere Möglichkeit führt zu einem Paar identischer Stammbrüche.

Fall 2.3 n ist ungerade, größer als 1 und keine Primzahl, d.h. es ist $n = p\cdot q$ für geeignete ganzzahlige $p > 1$ und $q > 1$. Ferner hat n^2 mindestens die paarweise verschiedenen Teiler 1 und p; über diese konstruieren wir die Lösungen

$2\cdot b_1 - n = 1$, also $b_1 = {}^1/_2\cdot(n+1)$ und $a_1 = {}^1/_2\cdot(n+n^2)$ oder
$2\cdot b_2 - n = p$, also $b_2 = {}^1/_2\cdot(n+p)$ und $a_2 = {}^1/_2\cdot(n+p\cdot q^2)$.

Da $n > 2$, $p > 1$, $q > 1$ und $n^2=p^2\cdot q^2$,
ist $b_1 = {}^1/_2\cdot(n+1) < b_2 = {}^1/_2\cdot(n+p) < a_2 = {}^1/_2\cdot(n+p\cdot q^2) < a_1 = {}^1/_2\cdot(n+n^2)$;
wir haben im Fall 2.3 also zwei verschiedene Paare von Stammbrüchen gefunden, die (*) erfüllen.

Insgesamt haben wir also nachgewiesen, dass es genau in den Fällen "n ist Doppeltes einer Primzahl" und "n ist ungerade Primzahl" genau ein Paar von Stammbrüchen gibt, deren arithmetisches Mittel der Kehrwert von n ist.

2. Beweismöglichkeit:

Erster Teil: Die Bedingung ist notwendig.

Sei also n ein ungerade Primzahl (Fall (1)) oder das Doppelte einer Primzahl (Fall (2)). Es wird in beiden Fällen gezeigt, dass es genau ein ungeordnetes Paar verschiedener Stammbrüche gibt, deren arithmetisches Mittel den Wert ${}^1/_n$ hat.

Fall 1: Der Nenner n des Stammbruchs sei eine ungerade Primzahl p.

Wir betrachten die Gleichung $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{p}$ mit der Nebenbedingung $x \neq y$ (*).

Schreibt man diese Gleichung in der Form $\frac{1}{2\cdot x}+\frac{1}{2\cdot y}=\frac{1}{p}$, so sieht man $\frac{1}{2\cdot x}<\frac{1}{p}$, also $2\cdot x > p$, ebenso folgt $2\cdot y > p$. Es ist also $2\cdot x = p + q$ und $2\cdot y = p + r$ für geeignete positive ganze Zahlen r und q. Damit lautet die Gleichung $\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+r}=\frac{1}{p}$.

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner $(p + q)\cdot(p + r)\cdot p$ erhält man die notwendigen Bedingungen $(p + r)\cdot p + (p + q)\cdot p = (p + r)\cdot(p + q)$ bzw. $p^2 = q\cdot r$.

Da p eine Primzahl ist, folgt hieraus $q = r = p$ (Fall 1.1) oder $q = 1$ und $r = p^2$ (Fall 1.2) oder $q = p^2$ und $r=1$ (Fall 1.3).
Wir untersuchen, zu welchen Lösungen diese möglichen Zerlegungen führen:

Fall 1.1, also q = r = p. Dann ist $2\cdot x = p + q$ und $2\cdot y = p + r$, also x = y = p. im Widerspruch zur Bedingung $x \neq y$.
Damit führt diese Zerlegung zu keiner Lösung von (*).

Fall 1.2, also q = 1, r = p^2. Dann ist $2\cdot x = p + q = p + 1$ und $2\cdot y = p + r = p + p^2$.

Diese Bedingung erfüllt allein das Paar $x = \frac{p+1}{2}$ und $y = \frac{p+p^2}{2}$; offensichtlich ist die Bedingung $x \neq y$ erfüllt und der Mittelwert von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ ist wie gefordert

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{\frac{p+p^2}{2}}\right)=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+p^2}=\frac{p+1}{(p+1)\cdot p}=\frac{1}{p}.$$

Fall 1.3, also q = p^2 und r=1. Dieser Fall führt mit vertauschtem q und r bzw. x und y zum gleichen Paar verschiedener Stammbrüchen wie im Fall (1.2).

Falls p ungerade Primzahl ist, kann also $\frac{1}{p}$ auf genau eine Weise als arithmetisches Mittel von zwei verschiedenen Stammbrüchen dargestellt werden.

Fall 2: Der Nenner n des Stammbruchs sei das Doppelte einer Primzahl p, also $n = 2\cdot p$.

Wir betrachten die Gleichung $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2\cdot p}$ mit x < y. Aus der äquivalenten Form $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$ sieht man x > p und y > p; es ist also x = p + q und y = p + r für geeignete positive ganze Zahlen r und q.

Damit lautet die Gleichung $\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p+r}=\frac{1}{p}$ oder $p^2 = q\cdot r$.

Wie im Fall 1 schließt man: Da p eine Primzahl ist, folgt hieraus q = r = p (Fall 2.1) oder q = 1 und r = p^2 (Fall 2.2) oder q = p^2 und r=1 (Fall 2.3). Wir untersuchen, zu welchen Lösungen diese möglichen Zerlegungen führen:

Fall 2.1 q = r = p, also x = y im Widerspruch zur Forderung $x \neq y$.

Fall 2.2 q = 1 und r = p^2. Dann ist x = p + q = p + 1 und y = p + r = p + p^2.

Dieses Paar erfüllt die Bedingung $x\neq y$ und der Mittelwert von $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$ ist wie gefordert $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+p^2}\right)=\frac{p+1}{(p+1)\cdot p\cdot 2}=\frac{1}{2\cdot p}$.

Fall 2.3 q = p^2 und r = 1. Dieser Fall führt mit vertauschtem q und r bzw. x und y zum gleichen Paar verschiedener Stammbrüche wie im Fall (2.2).

Falls p Primzahl ist, kann also $\frac{1}{2\cdot p}$ auf genau eine Weise als arithmetisches Mittel von zwei verschiedenen Stammbrüchen dargestellt werden.

Zweiter Teil: Die Bedingung ist hinreichend:

Sei also n weder ungerade Primzahl noch das Doppelte einer Primzahl. Dann ist entweder n = 2 (Fall 1) oder n ist das Doppelte einer zusammengesetzten Zahl (Fall 2) oder n ist das

Produkt zweier ungerader positiver ganzer Zahlen (Fall 3). In allen Fällen wird gezeigt, dass es zur Gleichung $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{n}$ entweder kein Lösungspaar (x;y) mit $x \neq y$ gibt oder aber mindestens zwei verschiedene ungeordnete Lösungspaare (x;y) mit $x \neq y$:

Fall 1: (n = 2): Wäre $\frac{1}{2}$ der Mittelwert zweier verschiedener Stammbrüche, dann wäre einer dieser Stammbrüche größer als $\frac{1}{2}$. Einziger solcher Stammbruch ist aber $1=\frac{1}{1}$. Dann müsste der Wert des anderen Stammbruchs 0 sein; 0 ist aber kein Stammbruch.

Fall 2: Es ist also $n = 2\cdot f\cdot g$ für geeigneten positiven ganzen Zahlen $f > 1$ und $g > 1$.

Dann sind $(x_1;y_1)$ und $(x_2;y_2)$ mit $x_1 = f\cdot g + 1$, $y_1 = f\cdot g + (f\cdot g)^2$ und $x_2 = f\cdot g + f$, $y_2 = f\cdot g + f\cdot g^2$ zwei offensichtlich ganzzahlige Lösungspaare der Gleichung $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{n}$.

Dies folgt aus den Rechnungen.

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{f\cdot g+1}+\frac{1}{f\cdot g+(f\cdot g)^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{f\cdot g+1}{f\cdot g+(f\cdot g)^2}\right)=\frac{1}{2\cdot f\cdot g}=\frac{1}{n} \text{ bzw.}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{f\cdot g+f}+\frac{1}{f\cdot g+f\cdot g^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{g+1}{f\cdot g+f\cdot g^2}\right)=\frac{1}{2\cdot f\cdot g}=\frac{1}{n}\ .$$

Wegen $f > 1$ und $g > 1$ ist nicht nur $x_i \neq y_i$, sondern sogar $x_i<y_i$. Da zusätzlich auch $x_1 < x_2$ (wiederum wegen $f > 1$ und $g > 1$), sind die beiden Lösungspaare wirklich verschieden.

Fall 3: Es ist also $n = f\cdot g$ für geeignete ungerade positive ganzen Zahlen $f > 1$ und $g > 1$.

Dann sind $(x_1;y_1)$ und $(x_2;y_2)$ mit $x_1 = (f\cdot g + 1):2$, $y_1 = (f\cdot g + (f\cdot g)^2):2$ und $x_2 = (f\cdot g + f):2$, $y_2 = (f\cdot g + f\cdot g^2):2$ an zwei Lösungspaare der Gleichung $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{n}$, wie die Rechnungen

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{(f\cdot g+1):2}+\frac{1}{(f\cdot g+(f\cdot g)^2):2}\right)=\frac{f\cdot g+1}{f\cdot g+(f\cdot g)^2}=\frac{1}{f\cdot g}=\frac{1}{n} \text{ bzw.}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{(f\cdot g+f):2}+\frac{1}{(f\cdot g+f\cdot g^2):2}\right)=\frac{g+1}{f\cdot g+f\cdot g^2}=\frac{1}{f\cdot g}=\frac{1}{n} \text{ zeigen.}$$

Da f und g beide ungerade sind, sind sowohl $f\cdot g+1$ als auch $f\cdot g+(f\cdot g)^2$ gerade ganze Zahlen und somit $(x_1;y_1)$ und $(x_2;y_2)$ beides Paare ganzer positiver Zahlen. Wegen $f > 1$ und $g > 1$ ist nicht nur $x_i \neq y_i$, sondern sogar $x_i < y_i$. Da zusätzlich auch $x_1 < x_2$ (wiederum wegen $f > 1$ und $g > 1$), sind die beiden Lösungspaare wirklich verschieden.

Damit ist auch der zweite Teil bewiesen und der Beweis ist vollständig.