6. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

1. Runde 2003/04 – Aufgaben und Lösungsbeispiele

Aufgabe 1

Florian schreibt unter die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dieselben Zahlen nochmals in irgendeiner anderen Reihenfolge. Nun subtrahiert er jeweils die untenstehenden Zahlen von den darüber stehenden und multipliziert die neun entstandenen Differenzen miteinander.
Florian behauptet, dass dieses Produkt immer gerade ist.

Hat er Recht?

Lösung:

Florian hat Recht.

Beweis:

1. Möglichkeit:

Von den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sind fünf ungerade und vier gerade Zahlen. Schreibt man unter diese Zahlen dieselben Zahlen nochmals in irgendeiner anderen Reihenfolge, so muss danach in jedem Fall unter mindestens einer der ungeraden Zahlen eine andere ungerade Zahl stehen. Die Differenz dieser beiden Zahlen ist gerade. Das Produkt aller Differenzen ist somit immer gerade, da immer mindestens ein Faktor gerade ist. Florian hat Recht!

2. Möglichkeit:

Wir versuchen, Florians Behauptung zu widerlegen, und suchen eine Verteilung mit ungeradem Produkt.

Ein Produkt aus mehreren Faktoren ist nur dann ungerade, wenn ***alle*** Faktoren ungerade sind.

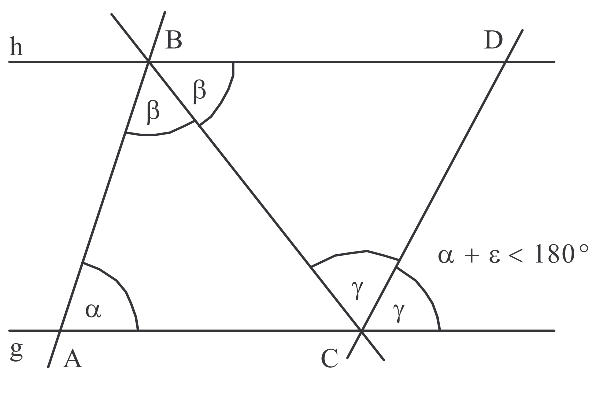
Wir müssten also eine Belegung der unteren Reihe so finden, dass alle Differenzen ungerade sind. Eine Differenz von zwei Zahlen wiederum ist nur dann ungerade, wenn eine Zahl gerade und die andere ungerade ist. Unter den neun Minuenden und neun Subtrahenden müssen also neun gerade und neun ungerade Zahlen sein. Es stehen jedoch nur acht gerade (je zweimal 2, 4, 6, 8), aber zehn ungerade Zahlen (je zweimal 1, 3, 5, 7, 9) zur Verfügung.

Wir können also keine Belegung der unteren Reihe finden, bei der alle Differenzen ungerade sind. Das Produkt kann also nicht ungerade sein. Florian hat Recht.

Aufgabe 2

Die Geraden g und h sind parallel.

Wie verändert sich γ, wenn α um ε vergrößert wird?



Lösung:

Beim Vergrößern von α um ε vergrößert sich γ um $\frac{1}{4}\varepsilon$.

Beweis:

Zunächst wird γ in Abhängigkeit von α berechnet:

1. Möglichkeit:

Die Geraden g und h sind nach Voraussetzung parallel, also gilt für die Nachbarwinkel α und 2β:

$\alpha + 2\beta = 180°$ oder äquivalent

$$\beta = 90° - \tfrac{1}{2}\alpha \qquad (1)$$

Auch die Winkel β und 2γ sind Nachbarwinkel an parallelen Geraden. Daraus folgt mit (1):

$2\gamma = 180° - \beta = 180° - (90° - \frac{1}{2}\alpha) = 90° + \frac{1}{2}\alpha$ (2)

Also ist $\gamma = 45° + \frac{1}{4}\alpha$ (3).

2. Möglichkeit:

Wie oben schließt man aus der Parallelität der Geraden g und h:

$\alpha + 2\beta = 180°$ (1')

Im Dreieck ACB ist 2γ Außenwinkel, also Summe der nicht anliegenden Innenwinkel:

$\alpha + \beta = 2\gamma$ (2')

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung (2') mit 2 und subtrahiert von ihnen jeweils die entsprechenden Seiten der Gleichung (1'), so ergibt sich:

$\alpha = 4\gamma - 180°$ (3')

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$\gamma = 45° + \frac{1}{4}\alpha$ (3).

Nun wird α um ε vergrößert:

$\alpha' = \alpha + \varepsilon$ (4)

Analog zu (3) erhält man:

$\gamma' = 45° + \frac{1}{4}\alpha'$ (5)

Dann ergibt sich mit (4) und (5) für die Änderung der Winkelweite:

$\gamma' - \gamma = \frac{1}{4}(\alpha' - \alpha) = \frac{1}{4}\varepsilon$

Beim Vergrößern von α um ε vergrößert sich γ um $\frac{1}{4}\varepsilon$.

Bemerkung:

An diesen Überlegungen ändert sich nichts, wenn die Winkelweite α den Wert 90^{o} überschreitet, solange nur $\alpha + \varepsilon < 180^{o}$ gilt.

Aufgabe 3

Bestimme alle natürlichen Zahlen a, b, c mit $a \le b \le c$, für die gilt: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Vorbemerkung:

Falls man, wie neuerdings üblich, die Zahl 0 als natürliche Zahl auffasst, sollte man erwähnen, dass in der Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ (*) offensichtlich keine der Zahlen a, b, c den Wert 0 annehmen darf.

Lösung:

Es gibt genau drei Lösungen für (a, b, c), nämlich (2, 3, 6), (2, 4, 4) und (3, 3, 3).

Beweis:

1. Möglichkeit:

Aus der Bedingung $a \le b \le c$ folgt $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b} \ge \frac{1}{c}$.

Somit kann man abschätzen: $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a}$. Hieraus folgt a ≤ 3, in jeder Lösung ist also a = 1 oder a = 2 oder a = 3. Diese drei Fälle werden nun systematisch untersucht:

1. Fall: a = 1

Dieser Fall liefert keine Lösung, denn die Gleichung (*) ist in diesem Fall äquivalent zu $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Beide Summanden der linken Seite sind aber positiv und können in der Summe daher nicht Null ergeben.

2. Fall: a = 2

Wir führen eine Fallunterscheidung für b durch:

b ≤ 1 ist wegen $b \geq a = 2$ nicht möglich.

b = 2 ergibt für c die notwendige Bedingung $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{c}=1$ oder äquivalent $\frac{1}{c}=0$; diese Bedingung ist für kein $c \in N$ erfüllt.

b = 3 ergibt für c die notwendige Bedingung $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}=1$ oder äquivalent c = 6; da hierfür wie in der Aufgabenstellung verlangt $b \leq c$ und $c \in N$ ist, ist **(a, b, c) = (2, 3, 6)** eine Lösung und die einzige Lösung mit a = 2 und b = 3.

b = 4 ergibt für c die notwendige Bedingung $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{c}=1$ oder äquivalent c = 4 ; da hierfür wie in der Aufgabenstellung verlangt $b \leq c$ und $c \in N$ ist, ist **(a, b, c) = (2, 4, 4)** auch eine Lösung und die einzige Lösung mit a = 2 und b = 4.

b ≥ 5 führt nicht zu weiteren Lösungen: Es ist dann $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{5}$ und man erhält für c die notwendige Bedingung $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{c}=\frac{7}{10}+\frac{1}{c}$ oder äquivalent $c \leq \frac{10}{3}<4$, was im Widerspruch zur Forderung $b \leq c$ steht. Für a = 2 und b ≥ 5 existieren also keine Lösungen.

3. Fall: a = 3

Wir führen wieder eine Fallunterscheidung für b durch:

b ≤ 2 ist wegen $b \geq a = 3$ nicht möglich.

b = 3 ergibt für c die notwendige Bedingung $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}=1$ oder äquivalent c = 3; da hierfür wie in der Aufgabenstellung verlangt $b \leq c$ und $c \in N$ ist, ist **(a, b, c) = (3, 3, 3)** eine Lösung und die einzige Lösung mit a = 3 und b = 3.

b ≥ 4 führt nicht zu weiteren Lösungen: Es ist dann $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{4}$ und man erhält für c die notwendige Bedingung $1=\frac{1}{3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{c}=\frac{7}{12}+\frac{1}{c}$ oder äquivalent $c \leq \frac{12}{5}<3$, was im Widerspruch zur Forderung $b \leq c$ steht. Für a = 3 und b ≥ 4 existieren also keine Lösungen.

Es gibt also **<u>nur</u>** die angegebenen drei Lösungen für (a, b, c), nämlich (2, 3, 6), (2, 4, 4) und (3, 3, 3).

Bemerkung:

Neben der Angabe der drei Lösungen besteht das Wesentliche der Aufgabe darin, zu zeigen, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

2. Möglichkeit:

Wir stellen zunächst fest:

(1) Es gibt keine Lösung mit a = 1, weil dann die Bedingung (*) äquivalent zu $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ ist. Beide Summanden der linken Seite sind aber positiv und können in der Summe daher nicht Null ergeben. Analog kann es keine Lösung mit b = 1 oder c = 1 geben.

(2) Wegen $a \leq b \leq c$ ist $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$, folglich gibt es keinen größeren Summanden als $\frac{1}{a}$.

(3) Das arithmetische Mittel der einzelnen Summanden in der Summe $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ hat den Wert $\frac{1}{3}$.

(4) In jeder Summe sind entweder alle Summanden gleich dem arithmetischen Mittel der Summanden oder es gibt einen Summanden, der größer als dieses arithmetische Mittel ist.

Mit (3) und (4) ist also

entweder $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=\frac{1}{3}$, also **(a, b, c) = (3, 3, 3)**; dies ist tatsächlich Lösung, da $3 \in N$ und $3 \leq 3 \leq 3$;

oder es gibt einen Summanden, der größer als $\frac{1}{3}$ ist.

In letzterem Fall ist mit (2) insbesondere $\frac{1}{a} > \frac{1}{3}$, d.h. a < 3, mit (1) sogar a = 2.

In jeder Lösung mit a = 2 ist die Bedingung (*) äquivalent zu $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$; das arithmetische Mittel der beiden Summanden $\frac{1}{b}$ und $\frac{1}{c}$ hat dabei den Wert $\frac{1}{4}$.

Mit analoger Argumentation ist also

entweder $\frac{1}{b} = \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$, also b = c = 4, was mit $4 \in N$ und $2 \leq 4 \leq 4$ zur Lösung **(a, b, c) = (2, 4, 4)** führt,

oder $\frac{1}{b} > \frac{1}{4}$, d.h. b < 4, also mit (1) b = 2 oder b = 3.

Es gibt keine Lösung mit b = 2 und a = 2, weil dann die Bedingung (*) äquivalent zur unerfüllbaren Bedingung $\frac{1}{c} = 0$ ist.

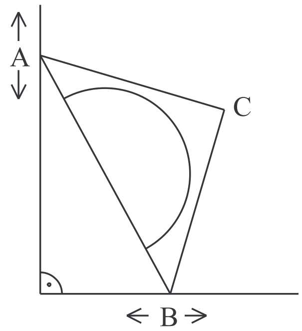
In jeder Lösung mit b = 3 und a = 2 kann die Bedingung (*) äquivalent umgeformt werden zu $\frac{1}{c} = \frac{1}{6}$, d.h. c = 6. Da $6 \in N$ und $2 \leq 3 \leq 6$, ist **(a, b, c) = (2, 3, 6)** tatsächlich eine Lösung.

Da hiermit alle möglichen Fälle abgearbeitet sind, sind (3, 3, 3), (2, 4, 4) und (2, 3, 6) auch die einzigen Lösungen.

Aufgabe 4

Die Eckpunkte A und B eines Geodreiecks gleiten entlang zweier benachbarter Kanten eines rechteckigen Blatt Papiers (siehe Abbildung).

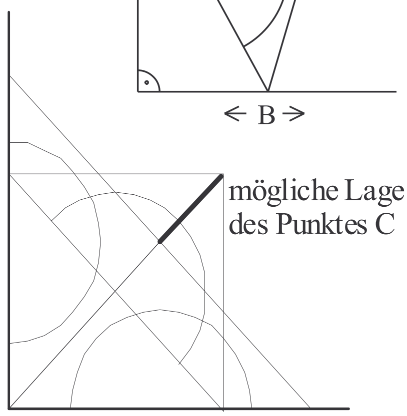
Welche Bahn beschreibt dabei die Ecke C des Geodreiecks?

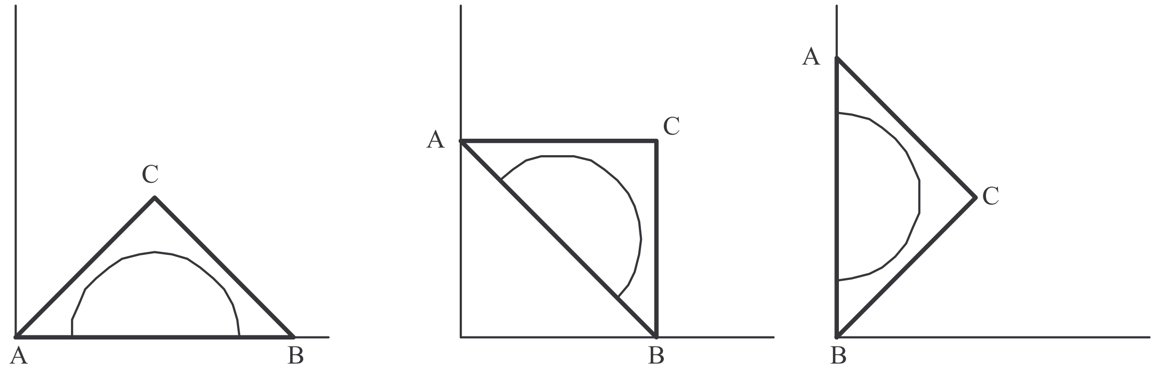


Lösung:

Die Bahn von C ist eine Strecke auf der Winkelhalbierenden der Kanten, wobei die Entfernung von C zur Papierecke mindestens gleich der Kathetenlänge und höchstens gleich der Hypotenusenlänge des Geodreiecks ist.

Die Lage der Endpunkte dieser Strecke gibt sich aus drei besonderen Lagen des Geodreieckes auf dem Blatt.





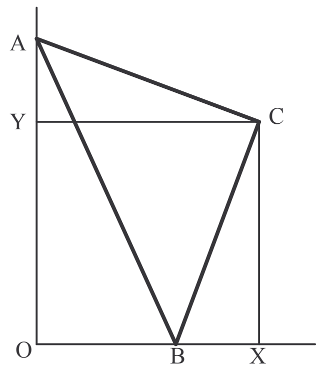
Beweis:

Im ersten Schritt des Beweises wird jeweils gezeigt, dass C stets auf der Winkelhalbierenden der Kanten liegt; im zweiten Schritt wird der kleinste und der größte Abstand des Punktes C von den Kanten bestimmt und so die Strecke festgelegt, die C durchlaufen kann.

1. Möglichkeit (mit kongruenten Dreiecken):

1. Schritt:

Man fällt die Lote von C auf die Kanten des Blattes. Die Lotfußpunkte heißen X und Y.



1. Fall: $\overline{OX} > \overline{OB}$

Der Winkel ACB und der Winkel YCX sind jeweils rechte Winkel, deshalb sind die Winkel BCX und ACY gleich groß. Ferner sind die Winkel CXB und CYA rechte Winkel und damit auch gleich groß. Die Strecken [CA] und [CB] sind als Katheten des Geodreiecks gleich lang. Die Dreiecke BXC und AYC sind demnach kongruent (SWW). Folglich haben [CX] und [CY] die gleiche Länge, C liegt auf der Winkelhalbierenden der Halbgeraden [OB und [OA.

2. Fall: X = B

Dann ist Y = A. Der Punkt C liegt auf der Winkelhalbierenden der Halbgeraden [OB und [OA.

3. Fall: $\overline{OX} < \overline{OB}$

Man schließt entsprechend dem 1. Fall, dass C auf der Winkelhalbierenden der Halbgeraden [OB und [OA liegt.

2. Schritt:

Da C auf der Winkelhalbierenden der Kanten liegt, ist der Abstand von C zu den Kanten gleich, d.h. $\overline{CX} = \overline{CY}$.

Zunächst wird der kleinste Abstand von C zur Papierecke bestimmt:

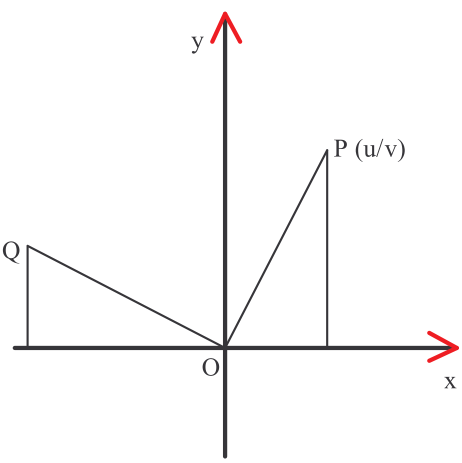
Betrachtet wird das Viereck OBCA. Da nach Voraussetzung $\angle BOA = 90°$ und $\angle ACB = 90°$ ist, gilt wegen der Winkelsumme im Viereck $\angle OAC + \angle CBO = 180°$. Daher ist $\angle OAC$ oder $\angle CBO$ größer oder gleich 90°. [OC] ist also als Gegenseite des größten Winkels im Dreieck OCA bzw. OBC größte Seite. Ihre Länge $\overline{OC}$ ist somit größer oder im Grenzfall (B = 0 bzw. A = 0) gleich $\overline{AC} = \overline{BC}$, also gleich der Kathetenlänge des Geodreiecks.

Nun zum größten Abstand von C zur Papierecke:

Betrachtet wird nun das Dreieck BXC. Da $\angle CXB = 90°$, ist die Hypotenuse [BC] die größte Seite. Der Abstand $\overline{CX}$ ist also stets kleiner oder im Grenzfall B = X gleich $\overline{CB}$. Der Abstand von C zu den Kanten ist also höchstens gleich der Kathetenlänge, der Abstand von C zur Papierecke ist damit höchstens gleich der Hypotenusenlänge des Geodreiecks.

2. Möglichkeit (mit Hilfe eines Koordinatensystems):

Diese unterscheidet sich von der ersten Möglichkeit nur im ersten Schritt; hier wird mit Hilfe eines Koordinatensystems gezeigt, dass C auf der Winkelhalbierenden der Kanten liegt.



1. Schritt:

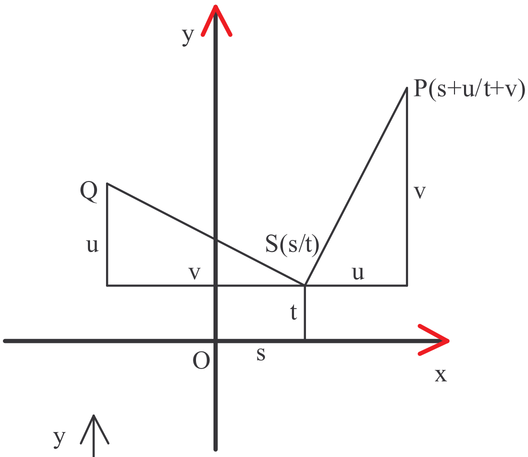
In einem Koordinatensystem gilt:

Ist das orientierte Dreieck aus O(0/0), P(u / v) und Q rechtwinklig und gleichschenklig mit der Spitze in O, so hat Q die Koordinaten (–v / u).

Entsprechend gilt (*):

Ist das orientierte Dreieck aus S(s/t), P(s + u / t + v) und Q rechtwinklig und gleichschenklig mit der Spitze in S, so hat Q die Koordinaten (s – v / t + u).

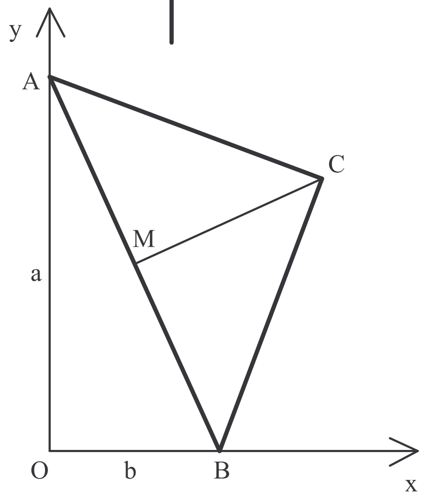
Die nebenstehende Zeichnung zeigt dies für positive Werte s, t, u und v. Entsprechend kann man diese Eigenschaft auch für die anderen Fälle durch eine Zeichnung verdeutlichen.



Man führt ein Koordinatensystem mit Ursprung O und den Papierkanten als Koordinatenachsen ein. B hat dann die Koordinaten (b/0), A die Koordinaten (0/a).

Die Mitte M der Strecke [AB] hat die Koordinaten $(\frac{b}{2}/\frac{a}{2})$.

Die Koordinaten von B kann man auch als $(\frac{b}{2}+\frac{b}{2}/\frac{a}{2}+\frac{(-a)}{2})$ darstellen.



Wendet man auf das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck MBC die Aussage (*) an, so hat C die Koordinaten $(\frac{a+b}{2}/\frac{a+b}{2})$.

Folglich liegt C auf der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten des Koordinatensystems.

2. Schritt:

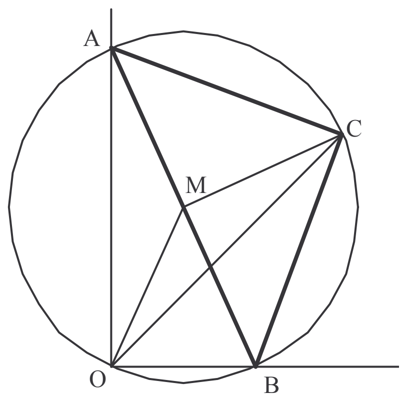
Wie bei der ersten Möglichkeit wird gezeigt, dass der Abstand von C zur Papierecke zwischen der Kathetenlänge und der Hypotenusenlänge des Geodreiecks liegt.

3. Möglichkeit (mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes):

1. Schritt:

M sei die Mitte der Strecke [AB].

Die Winkel ACB und BOA sind jeweils rechte Winkel. Wegen der Umkehrung des Satzes von Thales gibt es einen Kreis um M durch O, B, C und A. Der Umfangswinkel COA ist wegen des Peripheriewinkelsatzes halb so groß wie der Mittelpunktswinkel CMA. Dieser beträgt aber 90°. Also hat der Winkel COA die Größe 45°. C liegt demnach auf der Winkelhalbierenden der Kanten.



2. Schritt:

[OC] ist am kürzesten, wenn der Winkel OMC am kleinsten ist.

Dies ist hier der Fall, wenn O = B ist. Dann beträgt $\angle$ OMC = $\angle$ BMC = 90° und $\overline{OC} = \overline{BC}$. Der Abstand von C zur Papierecke ist damit gleich der Kathetenlänge des Geodreiecks.

[OC] ist am längsten, wenn der Winkel OMC 180° beträgt. Dann ist der Abstand von C zur Papierecke gleich der Hypotenusenlänge des Geodreiecks.

Alternativ kann auch hier wie im 2. Schritt der 1. Möglichkeit argumentiert werden.

Aufgabe 5

In der Zeichenebene ist ein Kreis k mit einem Durchmesser [AB] vorgegeben. Ein beliebiger Punkt P wird in der Ebene so gewählt, dass er nicht auf k und nicht auf der Geraden AB liegt.

Kann man nur mit einem Lineal das Lot von P auf AB konstruieren?

Lösung:

Die Konstruktion des Lotes ist für alle zulässigen Punkte P möglich.

Beweis:

Die Konstruktion beruht auf dem Grundgedanken, dass das gesuchte Lot die dritte Höhe des Dreiecks ABP ist, für das der Höhenschnittpunkt durch zwei Höhen mit Hilfe eines Lineals alleine konstruiert werden kann.

Zunächst zeichnet man die Geraden AP und BP ein.

(Bemerkung: Die Geraden AP und BP sind eindeutig definiert, da $A \neq P \neq B$ vorgegeben ist.)

1. Fall: Jede der beiden Geraden hat außer A bzw. B einen weiteren Schnittpunkt mit dem gegebenen Kreis.

Diese Schnittpunkte bezeichnen wir mit H_a und H_b. Da P nicht auf AB liegt, ist $H_a \notin AB$ und $H_b \notin AB$ sichergestellt. Nach dem Satz des Thales sind die Winkel $\angle AH_aB$ und $\angle AH_bB$ also beide rechte Winkel.

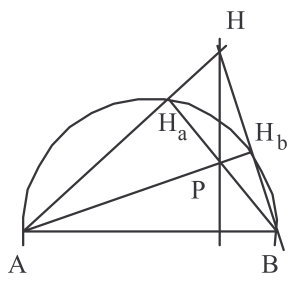
Damit sind H_a und H_b die Höhenfußpunkte im Dreieck ABP von A bzw. B aus. Die Höhen AH_a und BH_b des Dreiecks ABP schneiden sich im Höhenschnittpunkt H.

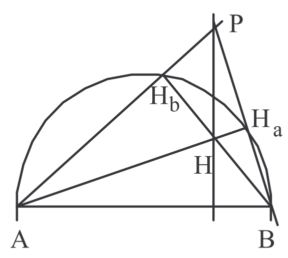
(Bemerkung: Der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABP ist stets eindeutig definiert, da wegen $P \notin AB$ ausgeschlossen ist, dass das Dreieck ABP entartet ist.)

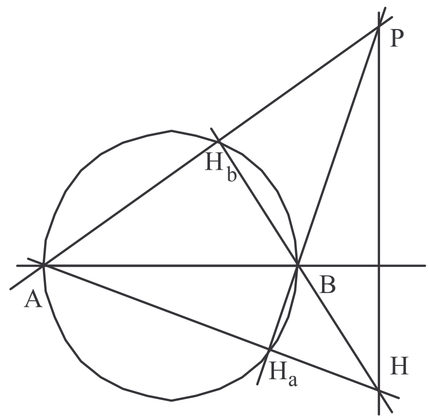
Da sich alle drei Höhen eines Dreiecks im Höhenschnittpunkt schneiden, ist die Gerade PH die dritte Höhe im Dreieck ABP und damit das gesuchte Lot.

(Bemerkung: Die Gerade PH ist eindeutig definiert, da P und H nicht zusammenfallen. Dies wäre genau dann der Fall, wenn das Dreieck ABP bei P einen rechten Winkel hätte; da P nicht auf dem Kreis liegt, ist dies nach dem Satz des Thales nicht der Fall.)

Diese Konstruktion lässt sich unabhängig davon ausführen, ob P innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt.







2. Fall: Eine der beiden Geraden hat außer A bzw. B keinen weiteren Schnittpunkt mit dem gegebenen Kreis.

Die Gerade, die keinen weiteren Schnittpunkt mit dem Kreis hat, ist Tangente in A bzw. B an den Kreis und damit das gesuchte Lot.

Aufgabe 6

Für welche natürlichen Zahlen n ist $1+2+3+...+n$ ein Teiler von $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$?

Lösung:

Für eine natürliche Zahl n ist die Summe $1+2+3+...+n$ genau dann ein Teiler des Produkts $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, wenn n + 1 <u>keine</u> ungerade Primzahl ist.

Beweis:

Vorbemerkungen:

(1) Für jede natürliche Zahl n gilt $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ (Gaußsche Summenformel).

(2) Wie üblich verwenden wir die Abkürzung n! („n Fakultät") für $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$. Es ist 1! = 1 und 0! = 1.

Die Summe $1+2+3+...+n$ ist genau dann ein Teiler des Produkts $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, wenn der Quotient $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}{1+2+3+...+n}$ eine natürliche Zahl ist. Mit (1) und (2) kann dieser Quotient umgeformt werden zu $\frac{2\cdot n!}{n\cdot(n+1)}=\frac{2\cdot(n-1)!}{n+1}$. Die folgende Behauptung liegt also nahe:

Behauptung:

Für eine natürliche Zahl n ist die Summe $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ genau dann ein Teiler des Produkts $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, wenn n + 1 <u>keine</u> ungerade Primzahl ist.

Teil „ ⇒ ": Sei n + 1 keine ungerade Primzahl.

Dann ist n + 1 = 1 (fällt natürlich wegen n > 0 sofort weg) oder n + 1 = 2 oder n + 1 ist Nicht-Primzahl.

1. Falls n + 1 = 2, so ist n = 1, also $1+2+3+...+n=1$ und $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n=1$. Daher ist die Summe Teiler des Produkts.
2. Falls n + 1 Nicht-Primzahl, so kann man n + 1 schreiben als Produkt $n+1=x\cdot y$ mit ganzen Zahlen x, y und $1<x,y\le\frac{n+1}{2}$. Hier gibt es wieder zwei Möglichkeiten:
   a) Falls $x\ne y$ so kommen sowohl x also auch y unter den Zahlen 1, 2, 3, ... , n – 1 vor und n + 1 = x · y ist ein Teiler von $(n-1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(n-1)$. Damit ist auch $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ein Teiler von $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.
   b) Falls x = y, so ist n + 1 = x^2 eine Quadratzahl. Wir zeigen zunächst, dass in diesem Fall für $n\ge 8$ nicht nur $x\le n-1$, sondern sogar $2x\le n-1$ ist. Es ist für $n\ge 8$ $x^2=n+1\ge 9$, also ist $x\ge 3$ und $(x-1)^2\ge 4$. Daher ist $(x-1)^2=x^2-2x+1=n+1-2x+1\ge 4$ und somit $2x\le n-2\le n-1$.
   Es ist also sogar $x\cdot(2x)=2(n+1)$ ein Teiler von $(n-1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(n-1)$ und damit erst recht auch n + 1. Wie oben ist daher wieder $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ein Teiler von $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.
   Es bleibt noch zu untersuchen, was im Fall n < 8 passiert. Die einzige Quadratzahl zwischen 1 und 9 ist aber 4, d.h. in diesem Fall ist n + 1 = 4 und n = 3. Man rechnet direkt nach, dass jetzt 1 + 2 + 3 = 6 ein Teiler von 1 · 2 · 3 = 6 ist.

Falls n + 1 keine ungerade Primzahl ist, ist also immer die Summe $1+2+3+...+n$ ein Teiler des Produkts $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.

Teil „ ⇐ ": Sei n + 1 eine ungerade Primzahl.

Eine Primzahl kann nur dann ein Produkt teilen, wenn sie mindestens einen der Faktoren teilt.
Wenn n + 1 das Produkt $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$ teilen würde, so müsste n + 1 einen der Faktoren 1, 2, 3, ... , n teilen. Dies ist unmöglich, da n + 1 größer als jeder dieser Faktoren ist. Damit ist erst recht das Vielfache $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ von n + 1 kein Teiler von n!.

Falls n + 1 eine ungerade Primzahl ist, ist also die Summe $1+2+3+...+n$ <u>kein</u> Teiler des Produkts $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$ und die Behauptung ist bewiesen.