# 5. Landeswettbewerb Mathematik Bayern

## 1. Runde 2002/03 – Aufgaben und Lösungsbeispiele

***Aufgabe 1***

Schreibe jede der Zahlen 1, 2, 3, …, 15 auf je eine Karteikarte.
Lege diese 15 Karten so in eine Reihe, dass die Summe der Zahlen auf zwei benachbarten Karten immer eine Quadratzahl ist.
Wie viele solcher Anordnungen sind möglich?

***Lösung:***

Es ist nur die Kette 9 7 2 14 11 5 4 12 13 3 6 10 15 1 8 in dieser und in umgekehrter Reihenfolge möglich, d. h. es gibt zwei Anordnungen.

***Beweis:***

Notiert man alle Zahlenpaare mit verschiedenen Summanden aus dem vorgegebenen Zahlbereich, die addiert eine der erreichbaren Quadratzahlen 4, 9, 16 oder 25 ergeben, so erhält man:

| | | |
|---|---|---|
| 1 + 3 = 4<br>1 + 8 = 9<br>1 + 15 = 16 | 2 + 7 = 9<br>2 + 14 = 16 | 3 + 1 = 4<br>3 + 6 = 9<br>3 + 13 = 16 |
| 4 + 5 = 9<br>4 + 12 = 16 | 5 + 4 = 9<br>5 + 11 = 16 | 6 + 3 = 9<br>6 + 10 = 16 |
| 7 + 2 = 9<br>7 + 9 = 16 | 8 + 1 = 9 | 9 + 7 = 16 |
| 10 + 6 = 16<br>10 + 15 = 25 | 11 + 5 = 16<br>11 + 14 = 25 | 12 + 4 = 16<br>12 + 13 = 25 |
| 13 + 3 = 16<br>13 + 12 = 25 | 14 + 2 = 16<br>14 + 11 = 25 | 15 + 1 = 16<br>15 + 10 = 25 |

Diese Aufstellung zeigt, dass die Zahlen 8 und 9 jeweils nur einen Nachbarn haben können. Diese beiden Zahlen müssen also am Anfang und am Ende der Zahlenfolge stehen.

Beginnen wir die Kette mit der Zahl 9, so folgt zwangsläufig 7, auf 7 folgt zwangsläufig die 2, auf 2 folgt zwangsläufig die 14. Danach folgen zwangsläufig die Zahlen 11, 5, 4, 12, 13 und 3.

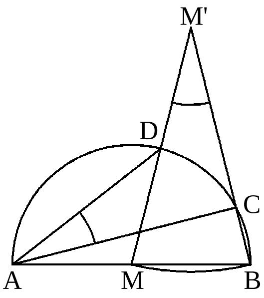
Auf die Zahl 3 kann nun die Zahl 6 oder die Zahl 1 folgen.

Das nachfolgende Schema zeigt den bisher dargestellten und den weiteren Verlauf.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | 6 | 10 | 15 | 1 | 8 |
| 9 | 7 | 2 | 14 | 11 | 5 | 4 | 12 | 13 | 3 | | | | | |
| | | | | | | | | | | | 8 | | | |
| | | | | | | | | | | 1 | | | | |
| | | | | | | | | | | | 15 | 10 | 6 | |

Aus dieser Darstellung wird deutlich, dass nur im ersten Fall alle 15 Zahlen in der Folge auftreten. Diese Kette kann auch in der umgekehrten Reihenfolge durchlaufen werden. Es gibt also zwei Möglichkeiten.

***Aufgabe 2***




In der nebenstehenden Figur sind M und M' die Kreismittelpunkte. Die beiden Winkel CAD und MM'B haben das gleiche Winkelmaß φ.

Bestimme φ.

***Lösung:***

φ beträgt $\frac{180°}{7}$.

***Beweis:***

(1) Nach den Voraussetzungen ist das Dreieck MBM' gleichschenklig mit der Basis [MB], denn es gilt $\overline{MM'} = \overline{BM'}$. Wegen der Winkelsumme in diesem Dreieck gilt:

$$w(BMM') = w(M'BM) = 90° - \frac{\varphi}{2}$$

(2) Die Winkel DMA und BMM' sind Nebenwinkel, deshalb folgt mit den Ergebnissen aus (1):

$$w(DMA) = 180° - w(BMM') = 90° + \frac{\varphi}{2}$$

(3) Das Dreieck ABC ist rechtwinklig mit w(ACB) = 90°, da C auf dem Thaleskreis über [AB] liegt. Wegen der Winkelsumme in diesem Dreieck folgt zusammen mit den Ergebnissen aus (1):

$$w(BAC) = 180° - w(ACB) - w(M'BM) = 90° - \left(90° - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{2}$$

(4) Das Dreieck AMD ist nach Aufgabenstellung gleichschenklig mit der Basis [AD]. Wegen der Winkelsumme in diesem Dreieck folgt mit den Ergebnissen aus (2):

$$w(MAD) = w(ADM) = \frac{1}{2} \cdot \left(180° - w(DMA)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(180° - \left(90° + \frac{\varphi}{2}\right)\right) = 45° - \frac{\varphi}{4}$$

(5) Aus (3) und (4) folgt nun:

$$\varphi = w(MAD) - w(BAC) \iff \varphi = \left(45° - \frac{\varphi}{4}\right) - \frac{\varphi}{2} \iff \varphi = 45° - \frac{3}{4}\varphi \iff \frac{7}{4}\varphi = 45°$$

$$\iff \underline{\underline{\varphi = \frac{180°}{7}}}$$

Alternativ lässt sich (3) auch durch eine Argumentation ohne Verwendung des Satzes von Thales ersetzen:

(3') Die Dreiecke AMC und MBC sind nach Voraussetzung gleichschenklig mit den Basen [AC] bzw. [BC]. Somit gilt: w(MAC) = w(ACM) bzw. mit (1) w(MCB) = w(CBM) = w(M'BM) = $90° - \frac{\varphi}{2}$

Damit folgt wegen der Winkelsumme im Dreieck ABC:
w(MAC) + w(ACM) + w(MCB) + w(CBM) = 180°, also

$$2 \cdot \left(w(MAC) + 90° - \frac{\varphi}{2}\right) = 180° \iff w(MAC) = \frac{\varphi}{2} \iff w(BAC) = \frac{\varphi}{2}$$

***Aufgabe 3***

Die Grundfläche eines Prismas ist ein regelmäßiges n-Eck.
Addiert man die Anzahl der Flächen- und Raumdiagonalen, so erhält man das Hundertfache der Anzahl der Kanten.

Bestimme n.

***Lösung:***

n beträgt 152.

***Beweis:***

In einem n-seitigen Prisma gilt

… für die Kantenzahl: **k = 3n**

*Begründung:* Die Grundfläche hat n Kanten, ebenso die Deckfläche, ferner gibt es n Verbindungslinien zwischen Grund- und Deckfläche. Insgesamt gibt es also k = n + n + n = 3n Kanten.

… für die Diagonalenzahl: **d = 2n² - 4n**

*Begründung:*

*1. Möglichkeit:*
In einem regelmäßigen n-Eck gehen von jeder Ecke genau n – 3 Diagonalen aus, denn zu je zwei Punkten, die nicht nebeneinander liegen, gehört genau eine Diagonale.

In einem konvexen n-Eck gibt es also genau $\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-3)$ Diagonalen.

Von jedem Punkt der Grundfläche gehen genau n – 1 Diagonalen zu Punkten der Deckfläche aus. Es gibt also genau $n\cdot(n-1)$ Diagonalen zwischen Grund- und Deckfläche.

Insgesamt erhält man: $d=2\cdot\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-3)+n\cdot(n-1)=n^2-3n+n^2-n=2n^2-4n$

*2. Möglichkeit:*

Wie oben gezeigt, gibt es in der Grund- und Deckfläche je genau $\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-3)$ Diagonalen. Ferner besteht die Mantelfläche eines n-seitigen Prismas aus n Parallelogrammen, die je 2 Diagonalen haben. Die Anzahl an Flächendiagonalen beträgt also insgesamt: fd = $2E\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-3)$ + 2n = n² - n

Von jeder Ecke der Grundfläche gehen genau n-3 Raumdiagonalen aus, daher gilt für die Anzahl der Raumdiagonalen: rd = nE(n-3) = n² - 3n
Insgesamt erhält man also auch: d = fd + rd = n² - n + n² - 3n = 2n² - 4n.

*3. Möglichkeit:*
Ein Prisma mit einem regelmäßigen n-Eck als Grundfläche hat 2n Ecken. Verbindet man zwei Ecken, so erhält man eine Kante oder eine Flächen- oder Raumdiagonale. Insgesamt kann jede der 2n Ecken mit jeder anderen Ecke verbunden werden, also mit 2n – 1 Ecken. Da jede Verbindungsstrecke **zwei** Punkte verbindet, gibt es $\frac{1}{2}\cdot 2n\cdot(2n-1)$ Verbindungsstrecken.

Da die Anzahl der Kanten 3n beträgt (siehe oben), gibt es $\frac{1}{2}\cdot 2n\cdot(2n-1)-3n$ = 2n² - 4n Flächen- oder Raumdiagonalen.

*4. Möglichkeit:*
Von jedem Punkt der Grund- und Deckfläche (also insgesamt von 2n Punkten) gehen drei Kanten aus, alle anderen je 2n-4 Verbindungen zu anderen Punkten sind Flächen- oder Raumdiagonalen. Da man bei diesem Verfahren jede Diagonale doppelt erhält, ist die Diagonalenzahl insgesamt:

d = $\frac{1}{2}$E2n E(2n-4) = 2n² - 4n

Die Bedingung, dass die Anzahl der Flächen- oder Raumdiagonalen das Hundertfache der Anzahl der Kanten ist, führt zur Gleichung:

$$d = 100Ek$$

Setzt man die Terme für die Diagonalen- bzw. Kantenzahl ein, so erhält man:

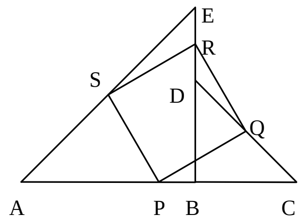
$$2n^2 - 4n = 100 \cdot 3n$$

Lösung dieser Gleichung ergibt:

$$2n^2 - 304n = 0 \quad 3 \quad 2n \cdot (n - 152) = 0$$

Da n •  0 ist, gilt: **n = 152**.

***Aufgabe 4***




Zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke unterschiedlicher Größe werden – wie im Bild gezeigt – aneinander gelegt. Die Punkte P, Q, R und S sind die Mittelpunkte der Strecken [AC], [CD], [DE] und [EA].

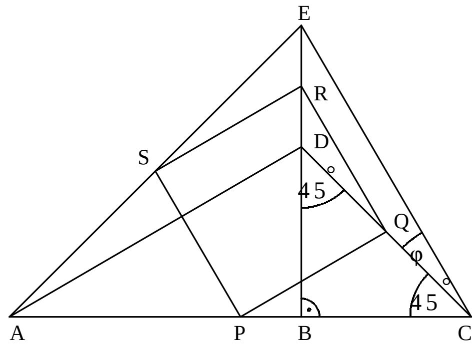
Weise nach, dass das Viereck PQRS ein Quadrat ist.

***1. Lösung (Mittelparallelen / kongruente Dreiecke):***

Bei der Lösung wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die Strecke [BD] kürzer ist als die Strecke [BE].

Die Ausgangsfigur wird um die Strecken [CE] und [AD] ergänzt.

Die Punkte P, Q, R und S sind nach Aufgabenstellung die Mittelpunkte der Strecken [AC], [CD], [DE] und [EA].




Im Dreieck CED ist [QR] Mittelparallele, also parallel zu [CE] und halb so lang wie [CE].

Im Dreieck CEA ist [SP] Mittelparallele, also parallel zu [CE] und halb so lang wie [CE].

Die Strecken [QR] und [SP] sind somit gleich lang und parallel.

Das Viereck QRSP ist also zumindest ein Parallelogramm.

Entsprechend zeigt man $\overline{SR} = \overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AD}$.

Die Dreiecke ABD und EBC sind kongruent (SWS), denn es gilt nach Aufgabenstellung

$\overline{AB} = \overline{EB}$, $\overline{BD} = \overline{BC}$ und w(DBA) = w(CBE) = 90°.

Aus dieser Kongruenz folgt $\overline{AD} = \overline{CE}$.

Daher ist $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RS} = \overline{SP}$; das Viereck PQRS ist also eine Raute.

Betrachten wir nun die Winkel in der Figur:

Bezeichnet man die Weite des Winkels ECD mit φ, so gilt w(ECB) = 45° + φ

und wegen der Winkelsumme im Dreieck BCE w(BEC) = 45° – φ.

Wegen der Kongruenz der Dreiecke ABD und EBC gilt: w(ADB) = w(ECB) = 45° + φ.

Aus der Parallelität der Strecken [AD] und [SR] bzw. [CE] und [QR] ergibt sich daraus:

w(SRQ) = w(SRB) + w(BRQ) = w(ADB) + w(BEC) = 45° + φ + 45° – φ = 90°.

Die Raute PQRS ist deshalb sogar ein Quadrat.

***2. Lösung (Pythagoras):***

Bei der Lösung der Aufgabe wird verwendet:

- Im Koordinatensystem werden die Koordinaten des Mittelpunkts M einer Strecke [AB] mit

  A ($x_A$ | $y_A$) und B ($x_B$ | $y_B$) berechnet mittels $M\left(\frac{x_A + x_B}{2} \middle| \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

- Die Länge der Strecke [AB] wird durch Anwendung des Satzes von Pythagoras berechnet mittels $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

Die Figur wird so in ein Koordinatensystem übertragen, dass der Punkt A im Ursprung und der Punkt B (und damit auch C) auf der x – Achse liegen.

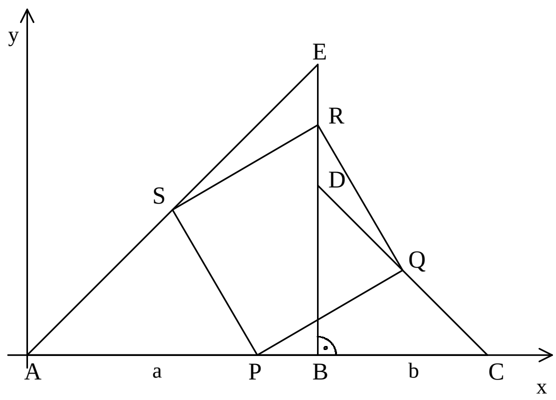
Die Strecke [AB] habe a, die Strecke [BC] habe b als Längenmaßzahl. Damit erhält man für die Koordinaten der Punkte:

A (0 | 0), B (a | 0), C (a + b | 0), D (a | b), E (a | a)

Für die Mittelpunkte erhält man:

$$P\left(\frac{a+b}{2} \middle| 0\right),\ Q\left(\frac{a+a+b}{2} \middle| \frac{b+0}{2}\right) = Q\left(a+\frac{1}{2}b \middle| \frac{1}{2}b\right),$$

$$R\left(\frac{a+a}{2} \middle| \frac{a+b}{2}\right) = R\left(a \middle| \frac{a+b}{2}\right),\ S\left(\frac{1}{2}a \middle| \frac{1}{2}a\right).$$




Für die Längen der Strecken [PQ], [PS], [SR] und [QR] ergibt sich:

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}b-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b-0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}$$

$$\overline{PS} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a-\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a-0\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}}$$

$$\overline{SR} = \sqrt{\left(a-\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}$$

$$\overline{QR} = \sqrt{\left(a-\left(a+\frac{1}{2}b\right)\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}-\frac{1}{2}b\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}}$$

Es gilt somit: $\overline{PQ} = \overline{PS} = \overline{SR} = \overline{QR}$. $\Rightarrow$ Das Viereck PQRS ist eine Raute.

Für die Länge der Strecke [SQ] ergibt sich:

$$\overline{SQ} = \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}}\quad .$$

Mit der Umkehrung des Satzes von Pythagoras folgt nun aus

$\overline{PQ}^2 + \overline{PS}^2 = \left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right) + \left(\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2} = \overline{SQ}^2$, dass der Innenwinkel der Raute PQRS mit dem Scheitel P ein rechter Winkel ist.

PQRS ist somit ein Quadrat.

***3. Lösung (Vektoren):***

Hier wird bei der Lösung der Aufgabe verwendet:

- Im Koordinatensystem werden die Koordinaten des Mittelpunkts M einer Strecke [AB] mit A ($x_A$ | $y_A$) und B ($x_B$ | $y_B$) berechnet mittels $M\left(\frac{x_A + x_B}{2} \middle| \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ (wie in der 2. Lösung).
- Hat ein Vektor die Koordinaten $\begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix}$, so ist er durch Drehung um 90° aus dem Vektor $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ entstanden. Es gilt also $\begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$.

Wie in der 2. Lösung wird die Figur so in ein Koordinatensystem übertragen, dass der Punkt A im Ursprung und der Punkt B (und damit auch C) auf der x – Achse liegt.

Die Strecke [AB] habe a, die Strecke [BC] habe b als Längenmaßzahl. Damit erhält man für die Koordinaten der Punkte wieder:

A (0 | 0), B (a | 0), C (a + b | 0), D (a | b), E (a | a)

Für die Mittelpunkte erhält man wie in der 2. Lösung:

$$P\left(\frac{a+b}{2} \middle| 0\right);\ Q\left(\frac{a+a+b}{2} \middle| \frac{b+0}{2}\right) = Q\left(a + \frac{1}{2}b \middle| \frac{1}{2}b\right);\ R\left(\frac{a+a}{2} \middle| \frac{a+b}{2}\right) = R\left(a \middle| \frac{a+b}{2}\right);\ S\left(\frac{1}{2}a \middle| \frac{1}{2}a\right)$$

Für die Vektoren ergibt sich nun:

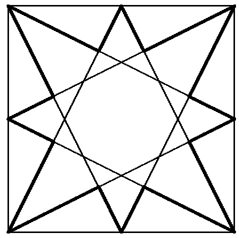
$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \begin{pmatrix} a + \frac{1}{2}b - \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \\ \frac{1}{2}b - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}b \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{PS} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a - \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \\ \frac{1}{2}a - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}a \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PS} \quad \text{(I)} \\ &\overline{PS} = \overline{PQ} \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} a - \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}b \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ} \ \Rightarrow \text{Das Viereck PQRS ist ein Parallelogramm.}$$

Wegen des rechten Winkels (I) ist dieses Parallelogramm sogar ein Rechteck und schließlich wegen (II) ein Quadrat.

***Aufgabe 5***

In einem Quadrat mit der Seitenlänge a sind die Seitenmitten mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbunden. Dadurch entsteht der gekennzeichnete Stern.



Wie groß ist sein Flächeninhalt in Abhängigkeit von a?

***Lösung:***

Der Flächeninhalt des Sterns beträgt $0{,}6a^2$.

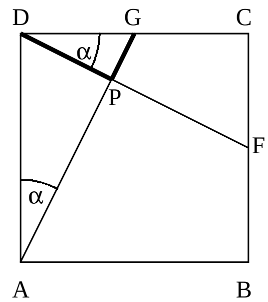
***Beweis:***

***1. Möglicheit (Pythagoras / Ähnlichkeit):***

Der Stern entsteht, indem man von einem Quadrat der Seitenlänge a acht Dreiecke wegschneidet, die aus Symmetriegründen alle kongruent sind.

Daher gilt für den Flächeninhalt des Sterns:

$$A_S = a^2 - 8 \cdot A_{\Delta DPG} \qquad (1).$$




Da $\overline{AD} = \overline{DC}$, $\overline{DG} = \overline{CF}$ und w(ADG) = 90° = w(DCF) ist, ist nach SWS das Dreieck AGD kongruent zum Dreieck DFC.

Daher gilt: w(GAD) = w(FDC) = $\alpha$.

Ferner folgt: w(ADP) = w(ADG) – w(FDC) = 90° – $\alpha$.

Wegen der Winkelsumme im Dreieck APD folgt:

w(DPA) = 180° – $\alpha$ – (90° – $\alpha$) = 90° .

Damit ist auch w(GPD) = 90° (Nebenwinkel).

Die beiden Dreiecke AGD und DPG stimmen in den zwei Winkeln $\alpha$ und 90° überein und sind deshalb ähnlich.

Daher gilt: $$A_{\Delta DPG} = \frac{\overline{DG}^2}{\overline{AG}^2} \cdot A_{\Delta AGD} \qquad (2).$$

Nach dem Satz von Pythagoras ist $\overline{AG}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DG}^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 5 \cdot \frac{a^2}{4}$.

Eingesetzt in (2) ergibt sich: $$A_{\Delta DPG} = \frac{\frac{a^2}{4}}{5 \cdot \frac{a^2}{4}} \cdot A_{\Delta AGD} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{20} a^2 .$$

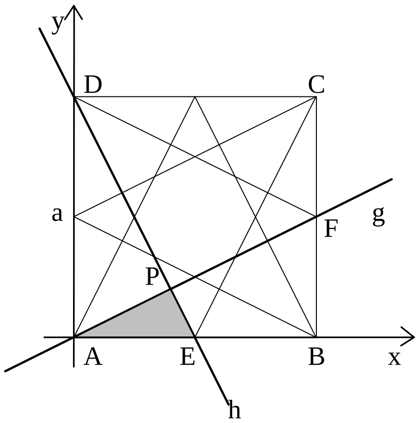
Mit (1) erhält man: $\mathbf{A_S} = a^2 - 8 \cdot \frac{1}{20} a^2 = \frac{3}{5} a^2 = \mathbf{0{,}6a^2}$.

***2. Möglichkeit (Geradengleichungen):***

Man erhält den Flächeninhalt $A_S$ des Sterns, indem man vom Flächeninhalt des Quadrats den achtfachen Flächeninhalt des Dreiecks AEP subtrahiert. Dieser lässt sich berechnen als

$$A_{\Delta AEP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AE} \cdot h_{\Delta AEP} \qquad (*),$$

wobei die Höhe $h_{\Delta AEP}$ gleich der y-Koordinate $y_P$ des Schnittpunkts P der beiden Geraden g = AF und h = DE ist.



Zur Berechnung von $y_P$ legt man zweckmäßig das Quadrat mit Seitenlänge a so in ein Koordinatensystem, dass die Ecke A im Ursprung O, die Seite [AB] auf der x-Achse und die Seite [AD] auf der y-Achse liegt.

Da nach Voraussetzung $\overline{FB} = \frac{1}{2} \cdot a = \overline{AE}$ ist, gilt für die Geradengleichungen:

(I) g: $y = 0{,}5x$

(II) h: $y = -2x + a$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt:

(I)-(II) $0 = 2{,}5x_P - a$

$\Rightarrow x_P = 0{,}4a$

Durch Einsetzen in (I) erhält man $y_P = 0{,}2a$ .

Somit erhält man für den Flächeninhalt des markierten Dreiecks AEP gemäß (*):

$A_{\Delta AEP} = 0{,}5 \cdot 0{,}5a \cdot 0{,}2a = 0{,}05a^2$

Der Flächeninhalt $A_S$ des Sterns ergibt sich damit zu

$\mathbf{A_S} = (a^2 - 8 \cdot 0{,}05a^2) = (a^2 - 0{,}4a^2) = \mathbf{0{,}6a^2}$.

Alternativ lässt sich $A_{\Delta AEP}$ auch mit der Flächendeterminanten berechnen:

$$A_{\Delta AEP} = a\ \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_E & x_P \\ y_E & y_P \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0{,}5a & 0{,}4a \\ 0 & 0{,}2a \end{vmatrix} =$$

$= 0{,}5\,(0{,}5a \cdot 0{,}2a - 0 \cdot 0{,}4a)$

$= 0{,}5 \cdot 0{,}1a^2$

$= 0{,}05a^2$

***Aufgabe 6***

101 Kugeln sind fortlaufend von 1 bis 101 nummeriert. Sie werden auf zwei Schalen A und B verteilt. Die Kugel mit der Nummer 40 liegt in A. Sie wird nun in Schale B gelegt. Dadurch erhöht sich in beiden Schalen der Mittelwert der Kugelnummern um 0,25.

Wie viele Kugeln sind anfangs in Schale A gewesen ?

***Lösung:***

Anfangs waren 73 Kugeln in Schale A.

***Beweis:***

***1. Möglichkeit:***

Aus der Angabe lässt sich folgendes entnehmen:

| **SCHALE** | **A** | **B** | |
|---|---|---|---|
| VORHER: | | | |
| Anzahl an Kugeln: | a | b | wobei a + b = 101 |
| Summe der Kugelnummern: | $s_A$ | $s_B$ | wobei $s_A + s_B = 1+2+\ldots+101 = \frac{101 \cdot 102}{2} = 5151$ |
| Mittelwert der Kugelnummern: | $m_A = \frac{s_A}{a}$ | $m_B = \frac{s_B}{b}$ | |
| NACHHER: | | | |
| Anzahl an Kugeln: | a - 1 | b + 1 | |
| Summe der Kugelnummern: | $s_A - 40$ | $s_B + 40$ | |
| Mittelwert der Kugelnummern: | $M_A = \frac{s_A - 40}{a-1}$ | $M_B = \frac{s_B + 40}{b+1}$ | |
| BEDINGUNG: | (1) $M_A = m_A + 0{,}25$ | und (2) $M_B = m_B + 0{,}25$ | |

Dies führt auf folgendes Gleichungssystem:

(I) $\frac{s_A - 40}{a-1} = \frac{s_A}{a} + 0{,}25$ und (II) $\frac{5151 - s_A + 40}{101 - a + 1} = \frac{5151 - s_A}{101 - a} + 0{,}25$

Durch Umformen erhält man:

(Ia) $a \cdot s_A - 40a = a \cdot s_A - s_A + 0{,}25a^2 - 0{,}25a$ und (IIa) $524291 - 101 \cdot s_A - 5191a + a \cdot s_A =$

$525402 - 102 \cdot s_A - 5151a + a \cdot s_A$

$+2575{,}5 - 50{,}75a + 0{,}25a^2$ bzw.

(Ib) $s_A = 39{,}75a + 0{,}25a^2$ und (IIb) $s_A = 3686{,}5 - 10{,}75a + 0{,}25a^2$.

Gleichsetzen von Gleichung (Ib) und (IIb) ergibt nach Vereinfachung:

$$50{,}5a = 3686{,}5 \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{a = 73}$$

Anfangs waren also 73 Kugeln in Schale A.

***2. Möglichkeit:***

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird die folgende Nummerierung gewählt: Es bezeichnet $x_0$ die Kugel mit der Nummer 40.

Dann liegen anfangs in Schale A die n+1 Kugeln $x_0, x_1, \ldots, x_n$ . Entsprechend sind die Kugeln in Schale B fortlaufend mit $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{100}$ bezeichnet.

Die Durchschnittswerte $m_A$ bzw. $m_B$ aller Kugelnummern, die zu Beginn in A bzw. B liegen, lassen sich damit wie folgt angeben: $m_A = \frac{40 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1}$ bzw. $m_B = \frac{x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{100-n}$ .

Es bezeichnen entsprechend $M_A$ und $M_B$ die Durchschnittswerte aller Kugelnummern, nachdem die Kugel mit der Nummer 40 von A nach B gelegt worden ist.

Es ist offenbar: $M_A = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ und $M_B = \frac{40 + x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{101-n}$ .

Die Mittelwerte $M_A$ und $M_B$ genügen nun laut Angabe den Bedingungen

(1) $M_A = m_A + 0{,}25$ und (2) $M_B = m_B + 0{,}25$

Mit den obigen Darstellungen für $m_A$ , $m_B$ , $M_A$ und $M_B$ ergeben sich daraus die Gleichungen

(I) $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \frac{40 + x_1 + \ldots + x_n}{n+1} + 0{,}25$ und (II) $\frac{40 + x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{101-n} = \frac{x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{100-n} + 0{,}25$ .

Nach geschickter Umstellung vereinfachen sich beide Gleichungen schrittweise zu

(Ia) $\frac{x_1 + \ldots x_n}{n} - \frac{x_1 + \ldots x_n}{n+1} = \frac{40}{n+1} + \frac{1}{4}$ und (IIa) $\frac{x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{100-n} - \frac{x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{101-n} = \frac{40}{101-n} - \frac{1}{4}$ bzw.

(Ib) $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n(n+1)} = \frac{161+n}{4(n+1)}$ und (IIb) $\frac{x_{n+1} + \ldots + x_{100}}{(100-n)(101-n)} = \frac{59+n}{4(101-n)}$ bzw.

(Ic) $x_1 + \ldots + x_n = \frac{n^2 + 161n}{4}$ und (IIc) $x_{n+1} + \ldots + x_{100} = \frac{(59+n)(100-n)}{4} = \frac{5900 + 41n - n^2}{4}$ .

Nun ist $x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{100} = (1 + 2 + \ldots + 100 + 101) - 40 = \frac{101 \cdot 102}{2} - 40 = 5111.$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen (Ic) und (IIc) ergibt sich die Gleichung

$5111 = \frac{n^2 + 161n}{4} + \frac{5900 + 41n - n^2}{4}$

und nach Multiplikation beider Seiten mit 4 und weiterer Vereinfachung schließlich

$20444 = n^2 + 161n + 5900 + 41n - n^2$ bzw. $14544 = 202n$ und damit $\mathbf{n = 72}$ **.**

Zu Beginn sind also 73 Kugeln in Schale A gelegen.